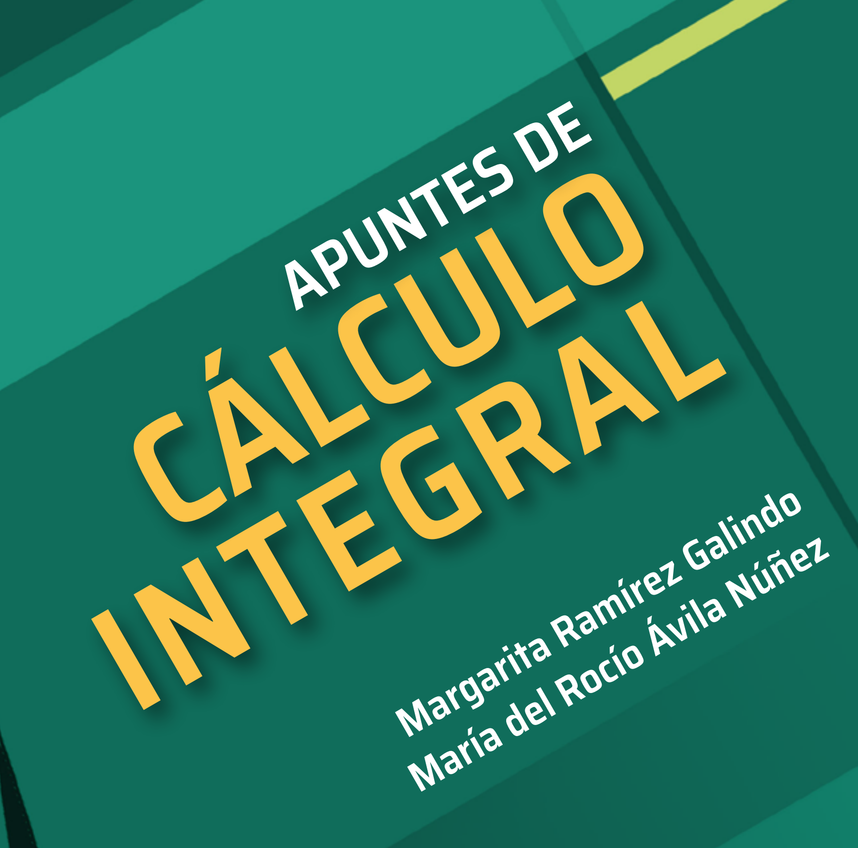
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA



DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS



APUNTES DE CÁLCULO INTEGRAL

Margarita Ramírez Galindo
María del Rocío Ávila Núñez



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

APUNTES
DE
CÁLCULO INTEGRAL

Margarita Ramírez Galindo
María del Rocío Ávila Núñez

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

RAMÍREZ GALINDO, Margarita y María del Rocío ÁVILA NÚÑEZ *Apuntes de Cálculo Integral*. México, Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ingeniería, 2021, 219 pp.

Apuntes de Cálculo Integral

Primera edición: marzo de 2021

Avenida Universidad 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma de México,
Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán, Cd. Mx., México, C. P. 04510.

FACULTAD DE INGENIERÍA
Avenida Universidad núm. 3000, Ciudad Universitaria,
Delegación Coyoacán, Cd. Mx., México, C. P. 04510,
http://www.ingenieria.unam.mx/

ISBN 978-607-30-4316-8

Hecho en México

Unidad de Apoyo Editorial

Cuidado de la edición y formación editorial: Elvia Angélica Torres Rojas
Edición de fórmulas matemáticas: Guadalupe Martínez Dávalos
Diseño de portada: Nismet Díaz Ferro

PRÓLOGO

La presente obra se ha elaborado con la finalidad de utilizarse como material didáctico de apoyo para los estudiantes que cursan la asignatura Cálculo Integral, la cual forma parte del Plan de Estudios de las carreras impartidas en la Facultad de Ingeniería, así como un complemento del material que emplean los profesores para impartir su curso.

Las autoras han formado parte del profesorado responsable de impartir esta asignatura desde hace varios años en la Facultad de Ingeniería y han concebido la elaboración de este material como resultado de su propia experiencia con el firme propósito de que estudiantes y profesores cuenten con material acorde al programa vigente de la materia.

Uno de los objetivos planteados para el presente trabajo es que, con el empleo de un lenguaje sencillo, pero sin perder la formalidad, los estudiantes puedan comprender de manera accesible los diferentes conceptos que se presentan. El contenido de la obra está estructurado de acuerdo con el programa vigente de la asignatura, en lo que se refiere al orden en que se presentan los temas. Se ha considerado la naturaleza de los diferentes conceptos que conforman los contenidos del programa para presentar algunos ejemplos resueltos, cuyo número varía en los temas donde se ha considerado pertinente incorporarlos.

En el Tema 1, *Sucesiones y series*, se presentan los conceptos principales a partir de sus definiciones, así como diversos teoremas que se enuncian sin demostración. Para su estudio se ha divido en diferentes subtemas: sucesiones, series, los diferentes tipos de series, representación de funciones en series de potencias, finalizando con la Serie de Taylor y la Serie de Maclaurin.

El Tema 2, *Las integrales definida e indefinida*, comprende diferentes subtemas referidos a la integral definida, tales como el problema del área, el Teorema Fundamental del Cálculo y el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral, así como los correspondientes a la integral indefinida y diversos ejemplos. Del mismo modo se presenta la Regla de L^Hôpital y la definición de integral impropia, analizando diferentes casos.

En el Tema 3, *Métodos de integración*, se identifican diferentes subtemas, los primeros de ellos están referidos a los métodos más destacados: integración por partes, integración por sustitución trigonométrica e integración por fracciones parciales, con algunos ejemplos ilustrativos. Otros subtemas comprenden algunas aplicaciones geométricas como: cálculo del área de regiones planas, de la longitud de arco de una curva y del volumen de sólidos de revolución.

En el Tema 4, *Derivación y diferenciación de funciones escalares de varias variables*, se presentan los conceptos básicos de este tipo de funciones distribuidos en diversos subtemas, tales como definición de funciones reales de dos variables independientes, derivadas parciales, derivadas sucesivas, gradiente de una función y su aplicación para el cálculo de la derivada direccional. Asimismo, la generalización de la regla de la cadena para funciones de varias variables y su aplicación en funciones implícitas. Cabe señalar que algunos de esos contenidos, se han distribuido en orden diferente al señalado en el programa atendiendo a una mejor didáctica, desde el punto de vista de las autoras.

En su carácter de primera obra de esta índole asociada a la asignatura en cuestión, comprendemos que existe la potencial necesidad futura de realizar ajustes y complementos para la elaboración de ediciones próximas, ya que se tiene una expectativa por parte de las autoras con relación al cumplimiento de los objetivos planteados en la obra. Por ello, se agradecerán todos los comentarios y observaciones que surjan a partir del análisis de la presente edición.

Finalmente, agradecemos a la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería por el apoyo brindado en la revisión y corrección de estilo de estos Apuntes, en especial a la Mtra. María Cuairán, jefa de la Unidad, y a Elvia Angélica Torres Rojas por su invaluable apoyo y disposición, así como por las sugerencias que nos hicieron llegar para lograr una mejor calidad en la presentación de la obra.

MARGARITA RAMÍREZ GALINDO
MARÍA DEL ROCÍO ÁVILA NÚÑEZ

CONTENIDO

TEMA 1

SUCESIONES Y SERIES

1.1 Definición de sucesión

SUCESIONES INFINITAS

Una sucesión infinita normalmente se denota por:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,\ a_n,\ldots$$

la cual se puede considerar como una colección de números reales; para estos números hay una correspondencia uno a uno con los enteros positivos. Coloquialmente, a las sucesiones infinitas se les llama, solamente, *sucesiones.*

Cada número real a_k es un término de la sucesión. La sucesión es un arreglo ordenado, ya que hay un primer término a_1, un segundo término a_2 y, para todo entero positivo n, un *n-ésimo término* entero a_n.

En matemáticas de precálculo, las sucesiones pueden emplearse para representar a un número racional; por ejemplo, $\frac{2}{3}$ se puede expresar como la sucesión:

$$0.6,\ 0.66,\ 0.666,\ 0.6666,\ 0.66666,\ldots$$

En este caso, el *n-ésimo término* se acerca, cada vez, más a $\frac{2}{3}$ conforme n crece.

Uno de los más importantes usos de las sucesiones infinitas es para definir las *series infinitas* como se verá más adelante.

El ejemplo anterior ilustra, de manera intuitiva, el concepto de sucesión; sin embargo, para estudios más rigurosos debe considerarse a una sucesión infinita como una función, según la siguiente definición.

DEFINICIÓN

Una sucesión infinita es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos.

Se considerará el contradominio de una sucesión infinita a un subconjunto de los números reales.

Frecuentemente, una sucesión con *n-ésimo término* a_n se denota por $\{ a_n \}$.

Por ejemplo, la sucesión $\{ 2^n \}$ tiene el *n-ésimo término* $a_n = 2^n$.

De acuerdo a la definición anterior, la sucesión $\{ 2^n \}$ es la función f tal que $f(n) = 2^n$ para todo entero positivo n.

Ejemplo

Escribir los cuatro primeros términos de las sucesiones:

a) $\left\{ \dfrac{n}{n+1} \right\}$

b) $\{ 4 \}$

RESOLUCIÓN:

Sucesión	*n-ésimo término*	*Primeros cuatro términos*
$\left\{ \dfrac{n}{n+1} \right\}$	$\dfrac{n}{n+1}$	$\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}$
$\{ 4 \}$	4	$4, 4, 4, 4$

Una sucesión infinita $\{ a_n \}$ puede tener la propiedad de que cuando n aumenta, a_n se acerca a algún número real L; es decir, $| a_n - L | \approx 0$ para n grande.

Por ejemplo, sea el término *n - ésimo* representado por:

$$a_n = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

En la sucesión se tiene $\{a_n\}$. Los primeros términos de ella son:

$$2 - \frac{1}{2},\ \ 2 + \frac{1}{4},\ \ 2 - \frac{1}{8},\ \ 2 + \frac{1}{16},\ \ 2 - \frac{1}{32},\ldots$$

Se observa que los términos se acercan de manera progresiva a 2 cuando n crece. En general, para todo entero positivo n:

$$\left| a_n - 2 \right| = \left| 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2 \right| = \left| \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

Y el número $\frac{1}{2^n}$, y por lo tanto también $\left| a_n - 2 \right|$, se puede hacer arbitrariamente cercano a cero escogiendo n suficientemente grande; en este caso, considerando la siguiente definición, la sucesión tiene límite 2 o converge a 2, lo cual se escribe así:

$$\lim_{n\to\infty} \left[2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] = 2$$

DEFINICIÓN

Una sucesión $\{a_n\}$ tiene el límite L o converge a L, lo cual se denota por:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número positivo N tal que

$$\left| a_n - L \right| < \varepsilon \text{ siempre que } n > N$$

Si tal número L no existe, la sucesión no tiene límite o diverge.

Otro concepto de interés, se relaciona con el comportamiento que tienen los diferentes términos que forman una sucesión, como se indica enseguida.

DEFINICIÓN

Una sucesión $\{ a_n \}$ se llama creciente, si $a_n < a_{n+1}$ para toda $n \geq 1$; esto es, $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ Se llama decreciente, si $a_n > a_{n+1}$ para toda $n \geq 1$. Una sucesión es monótona, si es creciente o decreciente.

Ejemplo

La sucesión $\left\{ \dfrac{3}{n+5} \right\}$ es decreciente, porque

$$\left\{ \frac{3}{n+5} \right\} > \frac{3}{(n+1)+5}$$

para toda $n \geq 1$. Se observa que el lado derecho es menor, pues su denominador es mayor.

DEFINICIÓN

Una sucesión $\{ a_n \}$ está acotada por arriba, si existe un número M tal que:

$$a_n \leq M \text{ para toda } n \geq 1$$

y está acotada por abajo, si hay un número m tal que:

$$m < a_n \text{ para toda } n \geq 1$$

Si está acotada por arriba y por abajo, $\{ a_n \}$ es una sucesión acotada.

1.2 Definición de serie

Como algebraicamente sólo se puede sumar un número finito de términos, hay que definir lo que significa una suma de este tipo.

DEFINICIÓN

Sea $\{a_n\}$ una sucesión infinita. La expresión $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ se denomina serie.

En la notación de una serie como la definición anterior, se emplea la notación de suma abreviada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ o bien, } \sum a_n$$

En la última expresión, se sobreentiende que la variable de suma es n. Cada número a_k es un término de la serie y a_n es el *n - ésimo término*.

DEFINICIÓN

(i) La k-*ésima* suma parcial S_k de la serie infinita $\sum a_n$ es

$$S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

(ii) La sucesión de sumas parciales asociada a la serie infinita $\sum a_n$ es

$$S_1,\ S_2,\ S_3, \ldots,\ S_n$$

Del inciso (i)

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

Para calcular S_5, S_6 y S_7, hay que añadir cada vez más términos de la serie. Así, S_{1000} es la suma de los primeros mil términos de $\sum a_n$. Si la sucesión $\{S_n\}$ tiene un límite S (es decir, converge a S), entonces S se denomina suma de la serie infinita a_n, como se formaliza en la siguiente definición.

DEFINICIÓN

Una serie infinita $\sum a_n$ es convergente (o converge), si la sucesión de sumas parciales converge; es decir, si

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \text{ para un número real } S$$

El límite S se llama suma de la serie $\sum a_n$ y se escribe:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

La serie $\sum a_n$ es divergente (o diverge), si $\{S_n\}$ diverge. Una serie infinita divergente no tiene suma.

Ejemplos

1) Demostrar que la serie infinita $\frac{1}{1\bullet 2} + \frac{1}{2\bullet 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\bullet(n+1)} + \ldots$ converge y calcular su suma.

RESOLUCIÓN:

La descomposición en fracciones parciales del *n-ésimo término* a_n es:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Por lo tanto, la *n* - ésima suma parcial de la serie se puede escribir como:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

La serie converge y su suma es 1 .

2) Demostrar que la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n-1}$ es divergente.

RESOLUCIÓN:

La serie se puede escribir como $1 + \left(-1\right) + 1 + \left(-1\right) + \ldots + \left(-1\right)^{n-1} + \ldots$

Nótese que $S_k = 1$, si k es impar y $S_k = 0$, si k es par. Como la sucesión de sumas parciales $\left\{ S_n \right\}$ alterna u oscila entre 1 y 0, resulta que $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe, por lo tanto, la serie infinita diverge.

Un caso particular de serie infinita divergente, que será de utilidad más adelante, se presenta en la siguiente definición:

DEFINICIÓN

La serie armónica es la serie infinita divergente:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

1.3 Serie geométrica y serie *p*

Algunas series infinitas aparecen, frecuentemente, en la solución de problemas aplicados. Una de las más importantes es la serie geométrica

$$a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ...$$

TEOREMA

Sea $a \neq 0$. La serie geométrica

$$a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ...$$

(i) Es convergente y su suma es $\dfrac{a}{1-r}$, si $|r| < 1$

(ii) Es divergente, si $|r| \geq 1$

donde a y r son números reales con $a \neq 0$.

Ejemplos

1) Demostrar que la siguiente serie infinita converge y calcular su suma:

$$0.6 + 0.06 + 0.006 + ... + \frac{6}{n} + ...$$

RESOLUCIÓN:

Esta es una serie geométrica con $a = 0.6$ y $r = 0.1$. Por el inciso (i), del teorema anterior, la serie converge y su suma es:

$$S = \frac{0.6}{1-0.1} = \frac{0.6}{0.9} = \frac{2}{3}$$

2) Demostrar que la siguiente serie es convergente y calcular su suma:

$$2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + ... + \frac{2}{3^{n-1}} + ...$$

RESOLUCIÓN:

La serie converge, porque es una serie geométrica con $r = \frac{1}{3} < 1$. Por el teorema anterior, inciso (i), la suma es:

$$S = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

El teorema siguiente establece una condición necesaria para la convergencia:

TEOREMA

Si una serie infinita $\sum a_n$ es convergente, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots$$

es una serie p, donde p es una constante positiva.

Cuando $p=1$, se obtiene la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, la cual fue definida anteriormente.

La convergencia o divergencia de la serie p se establece a partir del siguiente teorema:

TEOREMA

La serie p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots$$

1. converge si $p > 1$
2. diverge si $p \le 1$

Cabe mencionar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots$ es llamada también serie armónica generalizada.

1.4 Serie de términos positivos

Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de *términos positivos*, si los términos de la sucesión $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ son positivos a partir de un cierto término.

CRITERIO DE COMPARACIÓN

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos.

1) Si existe b_n, $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq b_n$ a partir de un cierto término y de forma que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sea convergente, entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

2) Si existe b_n, $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq b_n \leq a_n$ a partir de un cierto término y de forma que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sea divergente, luego, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

CRITERIO DE COMPARACIÓN POR PASO AL LÍMITE

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos.

1) Si existe una serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tal que:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0, +\infty$$

entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, si y solo si, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente.

2) Si existe una serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tal que:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

3) Si existe una serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tal que:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$$

y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente, luego, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

CRITERIO DEL COCIENTE

Este criterio se sugiere a partir de la convergencia de una serie geométrica. En una serie geométrica, la razón entre términos consecutivos es constante. *El criterio del cociente* se refiere a series donde esta razón es *casi constante*.

TEOREMA (Criterio del cociente)

Sea $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ una serie de términos positivos.

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ existe y es < 1 , la serie converge

b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ existe y es > 1 o es infinito, la serie diverge

Ejemplo

Demostrar que la serie $p + 2p^2 + 3p^3 + ... + np^n ...$ converge para cualquier número p tal que $0 < p < 1$

RESOLUCIÓN:

Sea $a_n = np^n$ y $a_{n+1} = (n+1)p^{(n+1)}$ la razón entre términos consecutivos es:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)p^{(n+1)}}{np^n} = \frac{n+1}{n} p$$

al calcular el límite se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p < 1$$

por lo que la serie converge.

1.5 Serie alternada

Una serie se dice *alternada*, si sus términos van alternando el signo positivo y el signo negativo o viceversa. Dos ejemplos ilustrativos son los siguientes:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}+\frac{6}{7}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n+1}$$

Estos ejemplos muestran que el enésimo término de una serie alternante tiene la forma:

$$a_n=(-1)^{n-1}b_n \quad \text{o} \quad a_n=(-1)^{n}b_n$$

donde b_n es un número positivo. En general, $b_n=|a_n|$

Enseguida, se enuncia la *prueba de la serie alternante* que establece, si el valor absoluto de los términos de una serie alternante disminuye a cero, entonces la serie converge.

PRUEBA DE LA SERIE ALTERNANTE

Si la serie alternante:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n=b_1-b_2+b_3-b_4+b_5-b_6+\ldots b_n>0$$

satisface:

a) $b_{n+1}\leq b_n$ para toda n

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$

entonces la serie converge.

Ejemplos

1) La serie armónica alternante $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ satisface:

a) $b_{n+1}<b_n$, pues, $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

por lo que la serie converge de acuerdo con la prueba enunciada.

2) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\ 3n}{4n\ -\ 1}$ es alternante, sin embargo,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4-\frac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

por lo que no se cumple la condición b).

Por otro lado, al calcular el límite del término enésimo de la serie

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n\ 3n}{4n-1}$$

este límite no existe, por lo que la serie diverge.

En algunos casos, interesa establecer si una serie dada es absolutamente convergente, lo cual es posible precisarlo a través de la siguiente prueba:

PRUEBA DE LA RAZÓN

a) Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y por consiguiente converge).

b) Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$, o bien, $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

1.6 Series de potencias

Una serie de potencias es aquella que tiene la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

donde x es una variable y las c_n son constantes llamadas coeficientes de la serie.

Una serie de potencias puede ser convergente para ciertos valores de x y ser divergente para otros.

La suma de la serie es una función

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

cuyo dominio es el conjunto de todas las x para las que converge la serie. Puede observarse que f parece a un polinomio. La diferencia radica en que f tiene un número infinito de términos.

De manera general, una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + c_3 (x-a)^3 + \ldots$$

se llama serie de potencias en $(x-a)$, o serie de potencias centrada en a.

Respecto a este tipo de series, para analizar su carácter de convergencia se enuncia el teorema que se presenta enseguida.

TEOREMA

Para una serie de potencias dada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

solo hay una de tres posibilidades:

i) La serie solo converge cuando $x = a$

ii) La serie converge para toda x

iii) Hay un número positivo, R, tal que la serie converge si $|x-a| < R$ y diverge, si $|x-a| > R$

El número R del caso iii) se denomina *radio de convergencia* de la serie de potencias. Por convención, el radio de convergencia es $R=0$ en el caso i) y $R=\infty$ en el caso ii). El *intervalo de convergencia* de una serie de potencias consta de todos los valores de x para los cuales la serie converge. En el caso i), el intervalo consta de solo un punto, a; pero, en el caso ii), es $(-\infty,\infty)$; en el caso iii), se observa que la desigualdad $|x-a|<R$ se puede escribir en la forma $a-R<x<a+R$. Cuando x es un *punto extremo* del intervalo, esto es $x=a\pm R$, puede suceder cualquier cosa: la serie puede ser convergente en uno o ambos puntos extremos o ser divergente en ellos. Así, en el caso iii) existen cuatro posibilidades de intervalo de convergencia:

$$(a-R,\ a+R) \qquad (a-R,\ a+R] \qquad [a-R,\ a+R) \qquad [a-R,\ a+R]$$

Ejemplos

1) Hallar el radio y el intervalo de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

RESOLUCIÓN:

Sea $a_n = \dfrac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$

entonces:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-3)^{n+1} x^{n+1}}{\sqrt{n+2}}}{\dfrac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1} x^{n+1}\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n \sqrt{n+2}}\right|$$

$$= 3\sqrt{\frac{1+\left(\frac{1}{n}\right)}{1+\left(\frac{2}{n}\right)}}\ |x| = 3\,|x| \quad \text{conforme} \quad n\to\infty$$

De acuerdo con la prueba de la razón, la serie converge si $3\left|x\right|< 1$, y diverge si $3\left|x\right| > 1$; por lo tanto, converge si $\left|x\right| < \frac{1}{3}$ y diverge si $\left|x\right| > \frac{1}{3}$. Esto significa que el radio de convergencia es $R = \frac{1}{3}$

Se sabe que la serie converge en el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$; pero ahora, se debe investigar la convergencia en los puntos extremos de dicho intervalo. Si $x = -\frac{1}{3}$, la serie se transforma en:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

la cual diverge. Si $x = \frac{1}{3}$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

que converge, según la prueba de la serie alternante; por lo tanto, la serie de potencias original converge cuando $-\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3}$ y el intervalo de convergencia es $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

2) Determinar el radio e intervalo de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

RESOLUCIÓN:

Si $a_n = \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$

entonces:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}}}{\dfrac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}\left(3^{n+1}\right)}{n(x+2)^n\left(3^{n+2}\right)}\right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{|x+2|}{3}\right) \longrightarrow \frac{|x+2|}{3}$$

Con la prueba de la razón, se ve que la serie converge si $\frac{|x+2|}{3} < 1$ y diverge si $\frac{|x+2|}{3} > 1$; por lo tanto, converge si $|x+2| < 3$ y diverge si $|x+2| > 3$. Entonces, el radio de convergencia es $R = 3$.

La desigualdad $|x+2| < 3$ se puede escribir en la forma $-5 < x < 1$, así pues, se probará la serie en los puntos extremos -5 y 1. Cuando $x = -5$ la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

que diverge, según la prueba de la divergencia $\left[(-1)^n\ n \text{ no converge a } 0\right]$. Cuando $x = 1$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} n$$

que también diverge, según la prueba de la divergencia. Por lo anterior, solo converge cuando $-5 < x < 1$, de modo que el intervalo de convergencia es $(-5,\ 1)$.

1.7 Representación de funciones como series de potencias

Es posible representar cierto tipo de funciones como sumas de serie de potencias, a partir de la manipulación de series geométricas, o bien, diferenciando o integrando dichas series. La importancia de expresar una función conocida, como una suma infinita de términos, radica en el hecho, por ejemplo, de poder integrar funciones que no tienen

antiderivadas elementales, resolver ecuaciones diferenciales y aproximar funciones mediante polinomios.

Sea la expresión:

$$(1) \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

una serie geométrica con $a = 1$ y $r = x$. Considerando ahora otro punto de vista, se dice que (1) expresa a la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ en términos de una serie de potencias.

Ejemplo

Expresar $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ como la suma de una serie de potencias y determinar el intervalo de convergencia.

RESOLUCIÓN:

Al reemplazar x con $-x^2$ en (1), se obtiene:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-\left(-x^2\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

Puesto que es una serie geométrica, converge cuando $\left| -x^2 \right| < 1$, es decir, $x^2 < 1$, o bien, $|x| < 1$; es decir, el intervalo de convergencia es $(-1,\ 1)$.

1.7.1 Series de Taylor y de Maclaurin

Según se ha visto en la sección 1.7, es posible deducir representaciones a manera de series de potencias para cierta clase de funciones.

Ahora, interesa determinar qué funciones tienen representación como series de potencias y deducir estas representaciones.

Sea f una función representada por una serie de potencias en $x - c$ de forma que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + a_4(x-c)^4 + \ldots$$

donde el dominio de f es un intervalo abierto que contiene a c. Como en el punto anterior, se pueden hallar representaciones en serie de potencias para $f'(x), f''(x),...$ derivando los términos de la serie de $f(x)$.

Entonces:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + \ldots$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-c)^{n-2} = 2a_2 + (3 \cdot 2)\, a_3 (x-c) + (4 \cdot 3)\, a_4 (x-c)^2 + \ldots$$

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)\, a_n (x-c)^{n-3} = (3 \cdot 2)\, a_3 + (4 \cdot 3 \cdot 2)\, a_4 (x-c) + \ldots$$

por lo que, para todo entero positivo k :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)\, a_n (x-c)^{n-k}$$

Cabe mencionar, que cada una de las series que se obtienen cuando se deriva, tienen el mismo radio de convergencia que la serie original. Al sustituir x por c en cada una de estas representaciones en serie se tiene:

$$f(c) = a_0, \quad f'(c) = a_1, \quad f''(c) = 2a_2, \quad f'''(c) = (3 \cdot 2)\, a_3$$

y, para todo entero positivo n:

$$f^{(n)}(c) = n!\,a_n, \quad \text{o bien,} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

Lo anterior, permite establecer que la serie de $f(x)$ tiene la forma que se presenta enseguida y es llamada *serie de Taylor* de $f(x)$ en c.

TEOREMA

Si f es una función tal que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

Para toda x en un intervalo abierto que contiene a c, entonces, $f^{(n)}(c)$ existe

para $n = 0,\ 1,\ 2,\ldots$ y $a_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$

por lo tanto,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \ldots$$

La serie de Taylor, también, se puede expresar con la notación de sumatoria:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

En particular, en el caso cuando $c = 0$, la serie obtenida se llama *serie de Maclaurin de* $f(x)$ *en* c.

Se enuncia formalmente enseguida:

TEOREMA

Si f es una función tal que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n$$

para todo x en un intervalo abierto ($-r$, r), entonces:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \ldots$$

representa la serie de Maclaurin de f.

TEMA 2

LAS INTEGRALES DEFINIDA E INDEFINIDA

2.1 El problema del área. Concepto de sumas de Riemann. Concepto de integral definida

LA NOTACIÓN DE SUMATORIA

En este tema, veremos que la integral definida se define como el límite de una cierta adición o suma; entonces, conviene introducir una notación que permita escribir una suma o sumatoria de constantes de forma abreviada.

Sea a_k un número real que depende de un entero k, se denota la suma o sumatoria:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

por el símbolo:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

esta notación es conocida como *notación de sumatoria o notación con sigma*. A la variable k se le denomina índice sumatorio.

Ejemplos

1) Desarrollar la sumatoria $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (3k-1)$

RESOLUCIÓN:

$$\sum_{k=1}^{5} (3k-1) = [3(1)-1] + [3(2)-1] + [3(3)-1] + [3(4)-1] + [3(5)-1]$$

$$= 2 + 5 + 8 + 11 + 14$$

También, podemos considerar tener la sumatoria desarrollada y escribirla en forma concisa.

2) Expresar en términos de una suma abreviada (o notación de sumatoria) las sumas indicadas.

a) Suma de los 10 primeros enteros impares positivos:

$$1 + 3 + 5 + ... + 19$$

$$\sum_{k=1}^{10} (2k - 1)$$

b) Suma de los 10 primeros enteros pares positivos:

$$2 + 4 + 6 + 8 + ... + 20$$

$$\sum_{k=1}^{10} 2k$$

En los ejemplos anteriores, el índice sumatorio se ha representado por la letra k, iniciando en el valor 1, sin embargo, esto no es necesario como se observa a continuación:

$$\sum_{k=3}^{5} 2^k = 2^3 + 2^4 + 2^5 \quad ; \quad \sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$$

no obstante, en general, por conveniencia se supondrá que el índice sumatorio empieza en $k = 1$.

El símbolo del índice sumatorio no es único, pues, también, podemos tener:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{m=1}^{n} a_m$$

Para el manejo posterior de la notación de sumatoria, es conveniente conocer algunas propiedades, las cuales se presentan a continuación.

PROPIEDADES

Para $m > 0$, $n > 0$

1) $\sum_{k=1}^{n} C\,a_k = C \sum_{k=1}^{n} a_k$, $C = \text{cte.}$

2) $\sum_{k=1}^{n} \left(a_k \pm b_k \right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

3) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$, $m < n$

Ejemplos

1) $\sum_{k=1}^{20} \left(3k^2 + 4k \right) = 3 \sum_{k=1}^{20} k^2 + 4 \sum_{k=1}^{20} k$

2) $\sum_{k=1}^{50} k^2 = \sum_{k=1}^{3} k^2 + \sum_{k=4}^{50} k^2 = \left(1^2 + 2^2 + 3^2 \right) + \left(4^2 + 5^2 + \ldots + 50^2 \right)$

Si tenemos el caso en que C es una constante, es decir, es independiente de un índice sumatorio k, entonces, $\sum_{k=1}^{n} C$ significa:

$$\underbrace{C + C + C + \ldots + C}_{n \text{ términos}}$$

en la suma anterior, ya que hay n términos C se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} C = n\,C$$

3) $\sum_{k=1}^{75} 6 = (75)(6) = 450$

Para el caso en que se tenga:

$$\sum_{k=2}^{n} C \quad \text{entonces} \; = \underbrace{C + C + C + \ldots + C}_{n-1}$$

$$\sum_{k=3}^{n} C \quad \text{por lo tanto} \; = C\left(n-2\right)$$

$$\sum_{k=1}^{3} 4 = 4 + 4 + 4 = 3(4) = 12$$

$$\sum_{k=2}^{3} 4 = 4 + 4 = 4\left(3-1\right) = 8$$

Algunas expresiones que permiten calcular el valor de las sumas abreviadas y que se demuestran por inducción matemática se presentan a continuación:

Si n es un entero positivo:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} C = nC$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\left(n+1\right)}{2}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\left(n+1\right)^2}{4}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n\left(n+1\right)\left(6n^3+9n^2+n-1\right)}{30}$

Ejemplos

1) Evaluar $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2$

RESOLUCIÓN:

Como es de la forma $\sum_{k=1}^{n} k^2$, en este caso, $n=10$, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10(11)(21)}{6} = 385$$

2) Evaluar $\sum_{k=1}^{10} (k+2)^3$

RESOLUCIÓN:

$$\sum_{k=1}^{10} (k+2)^3 = \sum_{k=1}^{10} \left(k^3 + 6k^2 + 12k + 8\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k^3 + 6 \sum_{k=1}^{10} k^2 + 12 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 8$$

como $n=10$, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{10} (k+2)^3 = \frac{10^2 (11)^2}{4} + 6 \frac{10(11)(21)}{6} + 12 \frac{10(11)}{2} + (10)(8)$$

$$= 3025 + 2310 + 660 + 80 = 6075$$

3) Desarrollar la sumatoria indicada:

a) $\sum_{k=1}^{5} 3k$

b) $\sum_{k=1}^{4} \frac{2^k}{k}$

c) $\sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^k}{2k+5}$

4) Expresar la suma dada, usando la notación con sigma:

a) $2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 + 12^2$

b) $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

c) $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$

5) Obtener el valor de la suma correspondiente:

a) $\sum_{k=1}^{20} 2k$

b) $\sum_{k=0}^{50} (-3k)$

c) $\sum_{k=1}^{5} \left(k^2 + 1\right)^2$

EL CONCEPTO DE INTEGRAL

Semblanza histórica

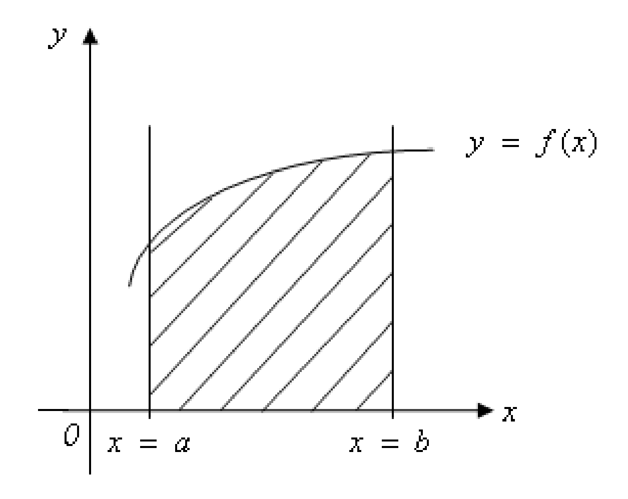
Se puede afirmar que el Cálculo Integral surge hace más de dos mil años cuando los griegos, al intentar resolver el problema de la determinación de áreas para figuras planas de contornos curvos, inventaron un método matemático que llamaron método de exhaución. Siglos después, Newton mostró cómo es posible obtener el valor de áreas mediante un proceso inverso a la derivación. Por su parte, Leibniz ideó la manera de obtener los valores de áreas y volúmenes mediante sumas de áreas de rectángulos y volúmenes de cilindros, respectivamente. De estos dos métodos, surge la teoría de integración o Cálculo Integral que, por lo tanto, podemos decir se ocupa de la solución de dos problemas:

1) Resolver el problema de la medida, o sea, dar métodos, generalmente, para el cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, etc.
2) Resolver el problema de la antiderivada.

En este inicio del estudio del Cálculo Integral, corresponde referirnos al primero de ellos, es decir, el problema del área, el cual corresponde a la noción de *integral definida*. Una forma intuitiva y didáctica de presentar este concepto es considerando que la integral viene a formalizar un concepto sencillo, intuitivo: el del área.

INTEGRAL DEFINIDA

Sea la función $y = f\left(x\right)$ y la siguiente gráfica:



Se desea calcular el área de la región limitada por la función $y = f\left(x\right)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

El procedimiento que se sigue es, en esencia, el método de exhaución empleado por los griegos hace más de dos mil años.

Se elige el intervalo $\left[a,\ b\right]$ y en este intervalo, consideremos algunos puntos como se muestra en la siguiente figura:

$0 \quad a = u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \ \cdots \ u_{n-1} \quad u_n = b$

Para los puntos $u_0, u_1, ..., u_n$, tenemos que $a = u_0 < u_1 < u_2 < ... < u_n = b$.

Al conjunto de puntos $\left\{u_0,\ u_1,\ u_2, ...,\ u_n\right\}$ le llamamos *partición* o *red* del intervalo $\left[a,\ b\right]$.

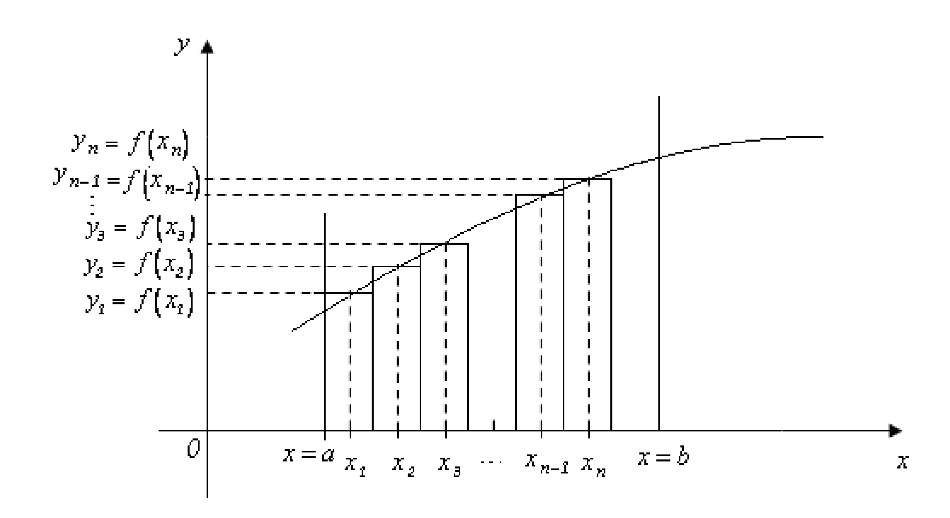
Una partición de un intervalo se divide en subintervalos y a cada uno de ellos se le llama también celda.

A la distancia entre los puntos extremos de cada celda se le llama amplitud de la celda o amplitud del subintervalo.

Ahora, formamos los subintervalos:

$$\left[u_0,\ u_1 \right],\ \left[u_1,\ u_2 \right],\ \left[u_2,\ u_3 \right],\ldots,\left[u_{n-1},\ u_n \right]$$

Luego, tomemos un punto x_k de cada intervalo $\left[u_{k-1},\ u_k \right]$; para cada x_k se tiene la correspondiente ordenada $y_k = f\left(x_k \right)$, de esta forma, se forman rectángulos cuyas bases son los intervalos $\left[u_{k-1},\ u_k \right]$ y las alturas corresponden a las y_k; lo anterior se ilustra en la siguiente figura:



El primer rectángulo tiene base $\left(u_1 - u_0 \right)$ y altura $f\left(x_1 \right) = y_1$, por lo que el área de este rectángulo es $y_1\left(u_1 - u_0 \right)$.

De forma similar, el área del segundo rectángulo es $y_2\left(u_2 - u_1 \right)$ y, así, sucesivamente, por tanto, la suma:

$$A = y_1\left(u_1 - u_0 \right) + y_2\left(u_2 - u_1 \right) + y_3\left(u_3 - u_2 \right) + \ldots + y_n\left(u_n - u_{n-1} \right)$$

representa un área que se puede considerar como una aproximación al área bajo la curva $y = f(x)$.

La expresión anterior se escribe en forma abreviada de la siguiente manera:

$$A = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(u_i - u_{i-1} \right) \quad \text{o} \quad A = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i \right)\left(u_i - u_{i-1} \right)$$

De forma intuitiva, podemos ver que la aproximación es mejor si se hacen rectángulos con bases más pequeñas, lo cual se logra haciendo más intervalos entre $x = a$ y $x = b$. Al hacer más intervalos, las diferencias $\left(u_i - u_{i-1} \right)$ son más pequeñas y se representan por la notación Δx (delta x), donde Δ es el símbolo que indica las diferencias $\left(u_i - u_{i-1} \right)$ y la x, que acompaña a la Δ, indica que las diferencias están en la recta del eje x.

Entonces, la expresión matemática anterior se escribe así:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i \right) \Delta_i x$$

De manera intuitiva, es posible concluir que al aumentar el número de rectángulos (lo cual se logra al aumentar n), el factor $\Delta_i x$ tiende a cero y el valor de la suma tiene un límite único que es el valor del área bajo la curva.

Lo anterior se simboliza con las expresiones:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i \right) \Delta_i x = \int_a^b f(x)\, dx$$

Al valor A se le llama también la integral de la función $f(x)$. La suma $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i \right) \Delta_i x$ se llama suma de Riemann.

A la expresión $\int_a^b f(x)\, dx$ se le llama *integral de Riemann* o la integral de la función en el sentido de Riemann.

Leibniz introdujo el símbolo $\int$, también, el símbolo dx (que se lee diferencial de x) y la palabra *integral*. Los valores de a y b, en la expresión $A = \int_a^b f(x)\, dx$, se llaman los extremos de integración donde a es el extremo inferior y b el intervalo superior de la integral.

A continuación, se establece la definición formal del concepto de integral definida.

DEFINICIÓN: INTEGRAL DEFINIDA

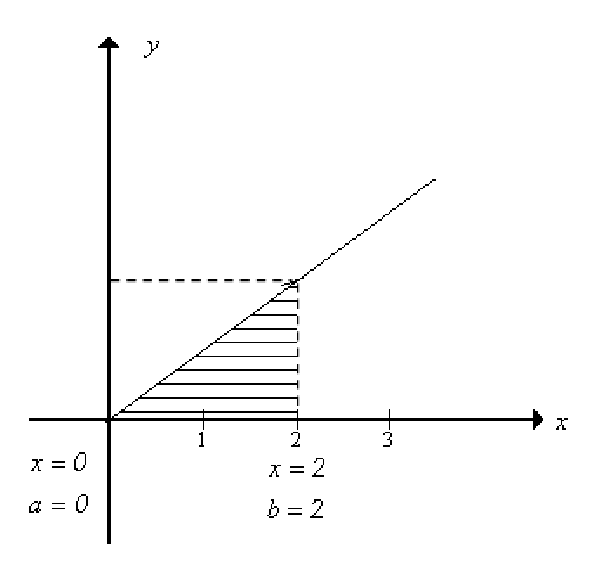
Si f es una función definida en el intervalo $[a,\ b]$, entonces, la integral definida de f de a a b que se denota por $\int_a^b f(x)\, dx$ está dada por la igualdad:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) \Delta_i x$$

Ejemplos

1) Mediante sumas de Reimann, calcule la integral $\int_0^2 x\, dx$.

RESOLUCIÓN:



Como se observa, el lugar geométrico describe una región limitada por la función, el eje de las abscisas y las rectas verticales determinadas por los extremos de integración.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) \Delta_i x$$

$$\Delta_i x = \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta_i x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_1 = \Delta_1 x \qquad f\left(x_1\right) = f\left(\Delta_1 x\right) = \Delta_1 x = \frac{2}{n}$$

$$x_2 = 2\Delta_2 x \qquad f\left(x_2\right) = f\left(2\Delta_2 x\right) = 2\Delta_2 x = \frac{4}{n}$$

$$x_3 = 3\Delta_3 x$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x_i = i\Delta_i x \qquad f\left(x_i\right) = f\left(i\Delta_i x\right) = i\Delta_i x = \frac{2i}{n}$$

$$f\left(x_i\right)\Delta_i x = \left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2}\, i$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) \Delta_i x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4}{n^2}\, i \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} \left[\frac{n\left(n+1\right)}{2} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2}{n^2}\left(n^2 + n\right) \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[2 + \frac{2}{n} \right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) \Delta_i x = 2$$

$$\therefore \int_0^2 x\, dx = 2$$

2) Mediante sumas de Reimann, calcular la integral $\int_1^3 \left(x^2 + 1\right) dx$

RESOLUCIÓN:

$$f\left(x\right) = x^2 + 1$$

$$a = 1, \quad b = 3$$

$$\int_a^b f\left(x\right) dx = \int_a^b f\left(x_i\right) \Delta_i x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) \Delta_i x$$

$$\Delta_i x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_1 = a + \Delta_1 x$$

$$x_2 = a + 2\,\Delta_2 x$$

$$\vdots$$

$$x_i = a + i\,\Delta_i x$$

$$f\left(x_i\right) = f\left(a + i\,\Delta_i\,x\right) \qquad a = 1 \quad \therefore$$

$$= f\left(1 + i\,\Delta_i\,x\right) = f\left(1 + \frac{2}{n}\,i\right)$$

$$\Delta_i\,x = \frac{2}{n}$$

$$f\left(1 + \frac{2}{n}\,i\right) = \left(1 + \frac{2}{n}\,i\right)^2 + 1$$

$$= 1 + \frac{4}{n}\,i + \frac{4\,i^2}{n^2} + 1$$

$$= 2 + \frac{4}{n}\,i + \frac{4\,i^2}{n^2}$$

$$f\left(x_i\right)\Delta_i\,x = \left(2 + \frac{4}{n}\,i + \frac{4\,i^2}{n^2}\right)\frac{2}{n}$$

$$= \frac{4}{n} + \frac{8}{n^2}\,i + \frac{8\,i^2}{n^3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta_i\,x = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4}{n} + \frac{8}{n^2}\,i + \frac{8\,i^2}{n^3}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{4}{n} + \sum_{i=1}^{n}\frac{8}{n^2}\,i + \sum_{i=1}^{n}\frac{8\,i^2}{n^3}$$

$$= \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$= \frac{4}{n}\left(n\right) + \frac{8}{n^2}\left[\frac{n\left(n+1\right)}{2}\right] + \frac{8}{n^3}\left[\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}\right]$$

$$= \; 4 + 4 + \frac{4}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{3n^3}\left(2n^3 + 3n^2 + n\right)$$

$$= \; 8 + \frac{4}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) \Delta_i x \;=\; \frac{32}{3} + \frac{8}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{32}{3} + \frac{8}{n} + \frac{4}{3n^2}\right] = \frac{32}{3}$$

$$\therefore \quad \int_1^3 \left(x^2 + 1\right) dx = \frac{32}{3}$$

3) Mediante sumas de Reimann, calcular la integral $\int_{-2}^{1} \left(-2x^2 + x\right) dx$

RESOLUCIÓN:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta_i x$$

$$f(x) = -\,2x^2 + x$$

$$a = -2, \qquad b = 1$$

$$\Delta_i x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-(-2)}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_i = a + i\,\Delta_i x$$

$$x_i = -2 + i\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$x_i = -2 + \frac{3}{n}\,i$$

$$f\left(x_i\right) = f\left(-2+\frac{3}{n}i\right) = -2\left(-2+\frac{3}{n}i\right)^2 + \left(-2+\frac{3}{n}i\right)$$

$$= -2\left(4-\frac{12}{n}i+\frac{9}{n^2}i^2\right)-2+\frac{3}{n}i$$

$$= -8+\frac{24}{n}i-\frac{18}{n^2}i^2-2+\frac{3}{n}i$$

$$= -10+\frac{27}{n}i-\frac{18}{n^2}i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta_i x = \sum_{i=1}^{n}\left(-10+\frac{27}{n}i-\frac{18}{n^2}i^2\right)\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta_i x = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{30}{n}+\frac{81}{n^2}i-\frac{54}{n^3}i^2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta_i x = -\frac{30}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{81}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i-\frac{54}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta_i x = -\frac{30}{n}(n)+\frac{81}{n^2}\frac{(n)(n+1)}{2}-\frac{54}{n^3}\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= -30+\frac{81}{2}+\frac{81}{2n}-18-\frac{27}{n}-\frac{9}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[-30+\frac{81}{3}+\frac{8}{n}+\frac{4}{3n^2}\right] = \frac{32}{3}$$

FUNCIÓN INTEGRABLE

TEOREMA

Si una función $y = f(x)$ es continua en $[a,\ b]$, entonces, se dice que la función $y = f(x)$ es integrable.

La condición de continuidad de una función en un intervalo es suficiente para que una función sea integrable, pero no es necesaria.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1) $y = f(x)$ es integrable en $[a,\ b]$ y $k =$ cte. arbitraria.

$$\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$$

2) f y g son integrables en $[a,\ b]$, luego:

$$\int_a^b \left[f(x) + g(x) \right] dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

3) $y = f(x)$ es integrable en $[a,\ b]$, $[a,\ c]$ y $[c,\ b]$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \quad ; \quad a < c < b$$

4) $y = f(x)$ es una función tal que $f(x) = k$; $k =$ cte.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b k\, dx = k(b - a)$$

5) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

6) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

7) Si $y = f(x)$, $y = g(x)$ son funciones integrables en $[a, b]$ y

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall\ x \in [a, b]$$

así que:

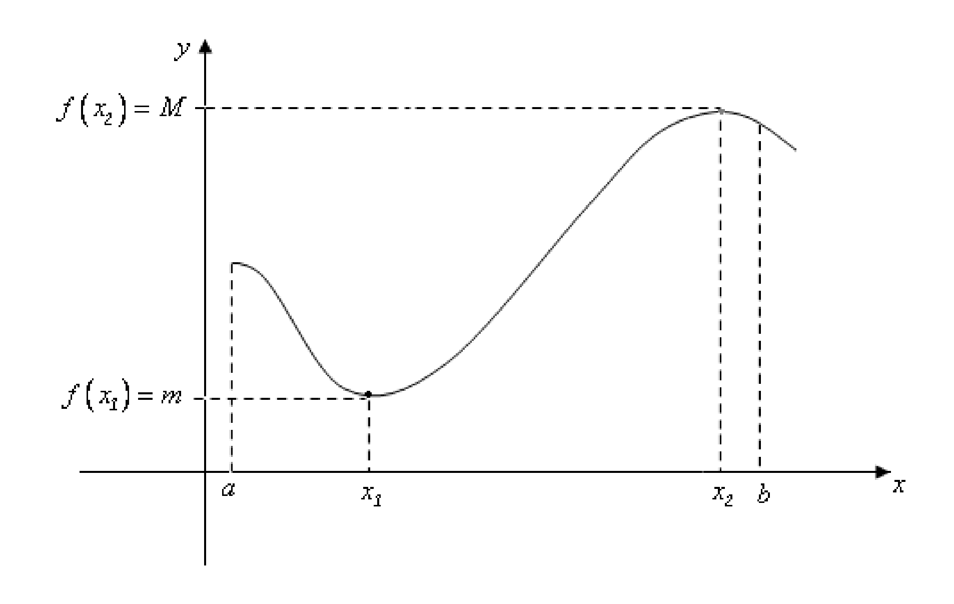
$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

8) $y = f(x)$ es continua en $[a, b]$, M y m son el máximo y mínimo absoluto, respectivamente, de la función f en $[a, b]$, es decir:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall\ x \in [a, b]$$

por lo tanto:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$



2.2 Enunciado e interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL (TVMCI)

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,\ b]$, entonces, existe al menos un número $x_0 \in [a,\ b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f\left(x_0\right)(b-a) \quad ; \quad a \le x_0 \le b$$

Al valor $f\left(x_0\right)$ se le llama ordenada media, valor promedio de la función, o bien, valor medio de la función; a x_0 se le llama abscisa media o valor cuya existencia garantiza el TVMCI.

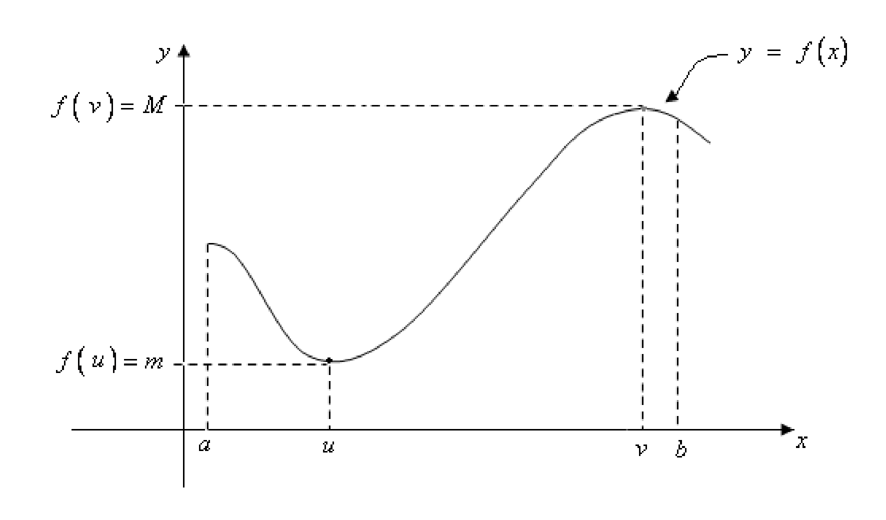
Si $f(x) = C$, en tal caso:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b C\,dx = C\,(b-a) = f\left(x_0\right)(b-a) \qquad x_0 \in [a,\ b]$$

Ahora, supongamos que f no es constante y que m y M son, respectivamente, el mínimo y el máximo de f en $[a,\ b]$

Sean u y v, u, $v \in [a,\ b]$ tales que $f(u) = m$ y $f(v) = M$

Lo anterior se muestra en la siguiente figura, considerando que $f(x) > 0$ $\forall\ x \in [a,\ b]$



como no es una función constante, entonces, $m < f(x) < M$ para algún x en $[a, b]$ y se puede escribir:

$$\int_a^b m\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b M\,dx$$

Ahora, de acuerdo con el teorema que dice:

$$\int_a^b C\,dx = C(b-a)$$

Se tiene:

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a)$$

dividiendo entre $b-a$ y sabiendo que $m = f(u)$ y $M = f(v)$ se tiene:

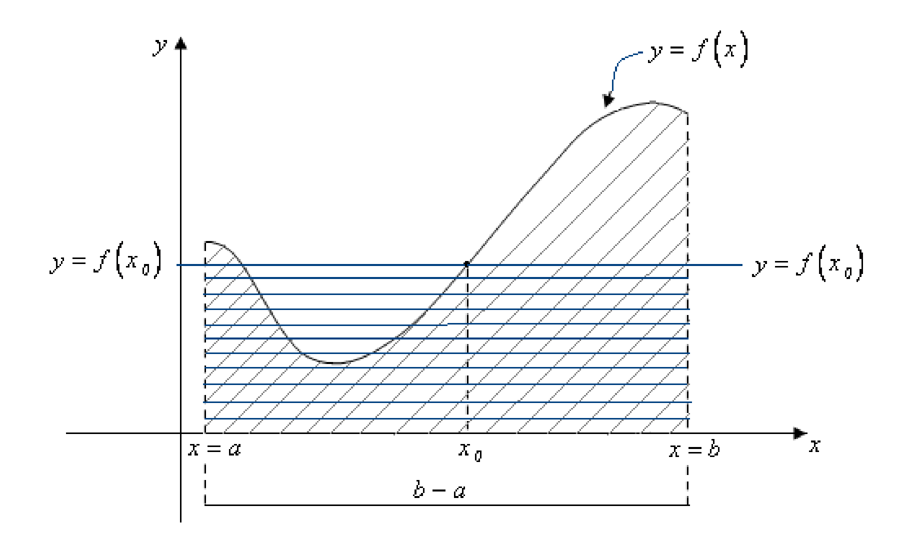
$$f(u) < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx < f(v)$$

donde $\left[\frac{1}{b-a}\right]\int_a^b f(x)\,dx$ es un número que existe entre $f(u)$ y $f(v)$, de acuerdo al Teorema del Valor Intermedio de Bolzano, cuyo enunciado se presenta enseguida.

TEOREMA

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y w es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces, existe al menos un número C en $[a, b]$ tal que $f(C) = w$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL TVMCI



$\int_a^b f(x)\,dx$ determina el área bajo la curva $y = f(x)$ que está limitada por el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

$f(x_0)(b-a)$ determina el área del rectángulo de la base $(b-a)$ y altura $f(x_0)$.

Ejemplo

Obtener el valor de x_0 tal que:

$$\int_a^b x^3\,dx = f(x_0)(2-1) \quad \text{, si se sabe que } \int_1^2 f(x)\,dx = \frac{15}{4}$$

RESOLUCIÓN:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a)$$

$$a = 1, \quad b = 2, \quad f(x) = x^3$$

$$\int_1^2 x^3\,dx = \frac{15}{4}$$

$$f\left(x_0\right) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = \frac{\frac{15}{4}}{1} = \frac{15}{4}$$

$$f\left(x_0\right) = \frac{15}{4}$$

$$f(x) = x^3$$

$$f\left(x_0\right) = \left(x_0\right)^3$$

$$\left(x_0\right)^3 = \frac{15}{4}$$

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{15}{4}}$$

$$x_0 = 1.5 \quad \in [1,\ 2]$$

2.3 Definición de la integral indefinida a partir de la integral definida con extremo superior variable. Enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)

LA ANTIDERIVADA

Para una mayor comprensión de los conceptos que permitan, a su vez, una mayor claridad sobre la integral indefinida es conveniente dar algunas definiciones básicas.

DEFINICIÓN: ANTIDERIVADA

Una función F será antiderivada de otra función f en un intervalo cerrado $[a,\ b]$, si $F'(x) = f(x) \quad \forall\ x \in [a,\ b]$.

Ejemplos

1) Sea $F(x) = x^2 + 2$, su derivada es la función $F'(x) = 2x$

De la función anterior, si $f(x) = F'(x)$, entonces, $f(x) = 2x$

Observamos que $f(x)$ es la derivada de $F(x)$, por lo tanto, $F(x)$ será antiderivada de $f(x)$.

2) Obtener una antiderivada de $f(x) = 2x$.

RESOLUCIÓN:

Una antiderivada de $f(x)$ es $F_1(x) = x^2$, otra es $F_2(x) = x^2 + 2$.

Este último ejemplo permite enunciar el siguiente teorema.

TEOREMA

La función $f(x)$ tiene una antiderivada particular en el intervalo cerrado $[a, b]$ que es $F(x)$.

Entonces, la antiderivada general de $f(x)$ es:

$$F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria y todas las antiderivadas de $f(x)$ se pueden obtener asignándole algún valor particular a C.

Si F es una antiderivada de f, entonces:

$$F'(x) = f(x)$$

Al diferenciar, es decir, expresar la derivada en términos del operador diferencial, se tiene:

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

$$dF(x) = f(x)\,dx$$

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C$$

se observa que, el proceso de antidiferenciar equivale a encontrar la antiderivada general de una función dada.

INTEGRAL DEFINIDA CON EXTREMO SUPERIOR VARIABLE

Un teorema de gran importancia en el estudio de la integral es el Teorema Fundamental del Cálculo, sin embargo, antes de enunciarlo se establecerá el concepto de la *integral definida con extremo superior variable*.

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,\ b]$, así:

$\int_a^b f(t)\,dt$ existe y proporciona un valor único

Ahora, si $x \in [a,\ b]\ x$, entonces, $f(x)$ es continua en $[a,\ b]$ y podemos escribir:

$\int_a^x f(t)\,dt$, esta expresión define a una función F, cuyo valor es:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

y su dominio es $[a,\ b]$. El valor de esta función $\forall\ x \in [a,\ b]$ será:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Nota: se ha empleado a t como variable de integración para evitar confusiones, pues se tiene como extremo superior a x.

De lo anterior, establecemos el siguiente teorema.

TEOREMA

Si la función $y = f(t)$ es continua en $[a,\ b]$, $x \in [a,\ b]$ y F es la función definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Entonces:

$$F'(x) = f(x)$$

Para esta última ecuación, si se considera que $x = a$, la derivada podrá ser por la derecha y, si $x = b$, la derivada será por la izquierda.

DEMOSTRACIÓN:

Se deriva $F(x)$ con la regla de los cuatro pasos para obtener $f(x)$. Consideramos a x y $x + \Delta x$ dos valores $\in [a,\ b]$.

Ahora, la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ será incrementada.

Entonces:

1) $F(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt$

2) $F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$

Además, si se sabe que:

$$-\int_a^x f(t)\,dt = \int_x^a f(t)\,dt$$

se tiene de (2):

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_{a}^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_{a}^{x} f(t)\,dt = \int_{a}^{x+\Delta x} f(t)\,dt + \int_{x}^{a} f(t)\,dt$$

$$= \int_{x}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

el segundo miembro se puede escribir como:

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Ahora bien, el Teorema del valor medio del Cálculo Integral asegura la existencia de un valor $x_0 \in [x,\ x+\Delta x]$ tal que:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(x_0)(x+\Delta x - x)$$

$$= f(x_0)(\Delta x)$$

Entonces, tenemos:

$$F(x+\Delta x) - F(x) = f(x_0)(\Delta x)$$

3) Dividiendo entre Δx:

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0)(\Delta x)}{\Delta x} = f(x_0)$$

4) Aplicando límites cuando $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0)$$

se observa que, en el primer miembro se tiene una derivada:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

por otro lado, como $x_0 \in [x,\ x+\Delta x]$, al tener $\Delta x \to 0$ implica que $x_0 \to x$, por lo tanto, en el segundo miembro tenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0) = \lim_{x_0 \to x} f(x_0) = f(x)$$

donde finalmente:

$$F'(x) = f(x)$$

esta última expresión puede escribirse como:

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

pero:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

por lo tanto:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

Esto muestra que, si en la integral definida $\int_a^b f(t)\, dt$ se considera variable el extremo de integración, se obtiene una función de él, es decir:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

y la derivada de esta función $F(x)$ es igual al integrando como función de dicho extremo: $f(x)$.

Ejemplos

1) Si $\int_a^x \sqrt{3t^2 + 1}\; dt$, obtener $f(x)$.

RESOLUCIÓN:

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}\; dt$$

Calcular, además, $F'(x)$, si $F(x) = \int_a^x \sqrt{3t^2 + 1}\; dt$

De acuerdo con los conceptos presentados, resulta $F'(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$

2) Obtener $\dfrac{d}{dt}\left[\int_1^t \sqrt[3]{s^2+s^3}\; ds\right]$

RESOLUCIÓN:

$$F'(t) = \sqrt[3]{t^2+t^3}$$

3) Obtener $\dfrac{d}{dx}\left[\int_x^2 \operatorname{sen}^2\left(t^2+1\right) dt\right]$

RESOLUCIÓN:

$$\frac{d}{dx}\left[-\int_2^x \operatorname{sen}^2\left(t^2+1\right) dt\right]$$

$$F'(x) = -\operatorname{sen}^2\left(x^2+1\right)$$

Luego de enunciar este teorema que permite expresar a la integral definida con extremo superior variable y de, ahí, garantizar el porqué de la antiderivada, enunciamos el TFC.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO (TFC)

1) La función $f(x)$ es continua en $[a,\ b]$

2) La función $g(x)$ es tal que $g'(x) = f(x) \quad \forall\ x \in [a,\ b]$

así:

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(x)\Big]_a^b = g(b) - g(a)$$

Este teorema permite determinar el valor exacto de una integral definida y al emplear dicho teorema se usa la siguiente notación:

$$g(x)\Big]_a^b = g(b) - g(a)$$

Ejemplos

Usando el TFC, calcular:

1) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos dx = \operatorname{sen} x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(0) = 1$$

2) $$\int_{-1}^{3} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{3} = \frac{1}{3}\left[(3)^3 - (-1)^3\right] = \frac{1}{3}\left[27 - (-1)\right] = \frac{28}{3}$$

LA INTEGRAL INDEFINIDA

Se llama integral indefinida de la función $f(x)$ (siendo f continua) a la expresión:

(A) $$\boxed{\int_a^b f(u)\,du + C}$$

y según hemos visto anteriormente:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad , \quad F'(x) = f(x)$$

también, se puede escribir así:

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

Entonces para la expresión (A), podemos tener lo siguiente:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(u)\,du = f(x)$$

aquí, vemos que la integral $\int_a^x f(u)\,du$ *es una antiderivada de* $f(x)$, así que:

$\int_a^x f(u)\,du + C$ *es la antiderivada general de* $f(x)$

para representar la integral indefinida de la función $f(x)$ se escribe:

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(u)\,du + C$$

Podemos observar que los conceptos de integral indefinida y antiderivada son distintos, pero para funciones continuas, la integral indefinida y la antiderivada son la misma función.

Ejemplo

Sea $f(x) = 2x+2$ continua en $[a,\ b]$. Si se sabe que $\int_a^0 f(x)\,dx = 1$.

Obtener:

a) El valor de *a*

b) El valor promedio de f

c) El o los valores de x, cuya existencia garantiza el TVMCI, $x_0 \in [a,\ b]$

RESOLUCIÓN:

a) $\int_a^0 (2x+2)\,dx = 1$

Del TFC:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big]_a^b$$

F es la función tal que $F'(x) = f(x)$

$$\int_a^b (2x+2)\,dx = x^2 + 2x\Big]_a^b = \underbrace{\left[0^2 + 2(0)\right]}_{F(b)} - \underbrace{\left[a^2 + 2(a)\right]}_{F(a)} = 1$$

$$= -a^2 - 2a = 1$$

$$a^2 + 2a + 1 = 0$$

$$(a+1)^2 = 0$$

$$a = -1 \quad \Rightarrow \quad [-1,\ 0] \text{ intervalo de integración}$$

b) Del TVMCI:

$$1 = f(x_0)(0-a)$$

$$1 = f(x_0)(-a)$$

$$1 = -a\, f(x_0)$$

$$f(x_0) = -\frac{1}{a} \quad \text{pero } a = -1, \text{ por lo tanto}$$

$$f(x_0) = 1 \longleftarrow \text{valor medio}$$

c) $f(x) = 2x + 2$

$$f(x_0) = 2(x_0) + 2$$

$$1 = 2x_0 + 2$$

$$2x_0 = -1, \quad x_0 = -\frac{1}{2} \quad \in [-1,\ 0]$$

2.4 Cálculo de integrales indefinidas inmediatas. Cambio de variable

La primera aplicación importante del TFC es que por ser operaciones inversas la derivación y la integración, las fórmulas para derivar vistas en Cálculo y Geometría Analítica pueden usarse para encontrar las correspondientes de integración.

A continuación, presentamos las fórmulas de integración elementales.

EXPRESIONES BÁSICAS DE INTEGRACIÓN

1) $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx \; ; \; k \in \mathbb{R}$

2) $\int dx = x + C$

3) $\int \left[f(x) + g(x) - h(x) \right] dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx - \int h(x)\, dx$

4) $\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \; ; \; n \in \mathbb{R} \; ; \; n \neq -1$

5) $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$

6) $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$

7) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

8) $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$

9) $\int \sec \tan x\, dx = \sec x + C$

10) $\int \csc \cot x\, dx = -\csc x + C$

EXPRESIONES CUADRÁTICAS BÁSICAS

11) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = ang\, \operatorname{sen} \dfrac{x}{a} + C$

12) $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\, ang \tan \dfrac{x}{a} + C$

13) $\int \dfrac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\, ang\, \sec \dfrac{x}{a} + C$

EXPRESIONES GENERALES

$$u = u(x), \quad v = v(x), \quad w = w(x)$$

Las propiedades son las mismas:

$$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int k \, du = k \int du$$

$$\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$$

$$\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$$

$$\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$$

$$\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$$

$$\int \sec \tan u \, du = \sec u + C$$

$$\int \csc \cot u \, du = -\csc u + C$$

$$\int [u + v - w] \, dx = \int u(x) \, dx + \int v(x) \, dx - \int w(x) \, dx$$

EXPRESIONES CUADRÁTICAS BÁSICAS

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = ang \operatorname{sen} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \, ang \tan \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \, ang \sec \frac{u}{a} + C$$

Ejemplos

1) $$\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C$$

2) $$\int \left(\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx = \frac{2}{3} \int x^3\,dx - \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{2}{3} \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) + C$$

$$= \frac{1}{6} x^4 - \sqrt{x} + C$$

3) $$\int (x-1)^7\,dx = \int u^n\,du$$

$$u = x - 1$$

$$du = 1\,dx$$

$$\int (x-1)^7\,dx = \frac{u^8}{8} = \frac{(x-1)^8}{8}$$

4) $$\int \left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}} x\,dx = \int u^n\,du = \int \left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}} (2x\,dx)\,\frac{1}{2}$$

$$u = x^2 - 1$$

$du = 2x\,dx$; se realiza el proceso de completar el diferencial

$$\int \left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}} x\,dx = \frac{1}{2} \int \left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}} (2x\,dx)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\left(x^2-1\right)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right] + C = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{4} \left(x^2-1\right)^{\frac{4}{3}} \right] + C$$

$$= \frac{3}{8} \left(x^2-1\right)^{\frac{4}{3}} + C$$

5) $\int \left(x^3 - 1 \right)^2 x \, dx \neq \int u^n \, du$

$u = x^3 - 1$

$du = 3x^2 \, dx$

$$\int \left(x^3 - 1 \right)^2 x \, dx = \int \left(x^6 - 2x^3 + 1 \right) x \, dx = \int \left(x^7 - 2x^4 + x \right) dx$$

$$= \frac{x^8}{8} - 2 \frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} + C$$

OTRAS EXPRESIONES

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \, ang \tan \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = ang \operatorname{sen} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

$$\int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \, ang \sec \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

Ejemplos

1) $\int \left(x^{\frac{3}{2}} + 2x + 1 \right) dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + x^2 + x + C$

2) $\int \left(\frac{t^2 + 2}{t^2} \right) dt = \int \left(\frac{t^2}{t^2} + \frac{2}{t^2} \right) dt = t + \frac{2t^{-1}}{-1} + C = t - \frac{2}{t} + C$

3) $\int \left(\tan^2 y + 1 \right) dy = \int \sec^2 y \, dy = \tan y + C$

Identidades pitagóricas que se emplearán eventualmente:

$$\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$$

$$1 + \cot^2 u = \csc^2 u$$

$$\tan^2 u + 1 = \sec^2 u$$

4) $$\int x^2\left(x^3-1\right)^4 dx = \int u^4 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^4\, du$$

$$u = x^3 - 1$$

$$du = 3x^2\, dx$$

$$\frac{du}{3} = x^2\, dx$$

$$\int x^2\left(x^3-1\right)^4 dx = \frac{1}{3}\frac{u^5}{5} + C$$

$$\int x^2\left(x^3-1\right)^4 dx = \frac{u^5}{15} + C = \frac{\left(x^3-1\right)^5}{15} + C$$

$$= \frac{\left(x^3-1\right)^5}{15} + C$$

5) $$\int 5x\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{5}{2}u^{\frac{4}{3}}\,\frac{3}{4} + C = \frac{15}{8}\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}} + C$$

$$u = 1 + x^2$$

$$du = 2x\, dx$$

$$= \frac{15}{8}\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}} + C$$

6) $$\int \operatorname{sen} 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$$

$$u = 2x$$

$$du = 2\,dx$$

7) $$\int x\cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 + C$$

$$u = x^2$$

$$du = 2x\, dx$$

8) $$\int \sec\frac{1}{3}x\tan\frac{1}{3}x\, dx = 3\sec\frac{1}{3}x + C$$

$$u = \frac{1}{3}x$$

$$du = \frac{1}{3}\,dx$$

9) $\int \cos x \operatorname{sen} x \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C$

$u = \operatorname{sen} x$

$du = \cos x \, dx$

10) $\int \sec^2 (2x+1) \, dx = \frac{1}{2} \tan (2x+1) + C$

$u = 2x + 1$

$du = 2 \, dx$

Ejemplos

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = ang \operatorname{sen} x + C$

$u = x$

$a = 1$

$du = dx$

2) $\int \frac{dx}{9 + x^2} = \frac{1}{3} ang \tan \left(\frac{x}{3} \right) + C$

$u = x$

$a = 3$

$du = dx$

3) $\int \frac{dx}{x \sqrt{4x^2 - 9}} = \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \int \frac{2 \, dx}{2x \sqrt{4x^2 - 9}} = \int \frac{dx}{x \sqrt{4x^2 - 9}}$

$u^2 = 4x^2$

$u = 2x$

$du = 2 \, dx$

$a^2 = 9$

$a = 3$

$= \frac{1}{3} ang \sec \left(\frac{2x}{3} \right) + C$

4) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}} = \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{1}{3}\,ang\,\text{sen}\,x^3 + C$$

$a^2 = 1$

$a = 1$

$u^2 = x^6$

$u = x^3$

$du = 3x^2\,dx$

5) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \int \frac{2x\,dx}{x^2\sqrt{x^4-1}}$$

$u^2 = x^4$

$u = x^2$

$du = 2x\,dx$

$a^2 = 1$

$a = 1$

$$= \int \frac{2\,dx}{x\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{2}\,ang\,\sec x^2 + C$$

6) $$\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+2)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = ang\,\text{sen}\,\frac{(x+2)}{2} + C$$

$a^2 = 4$

$a = 2$

$u^2 = (x+2)^2$

$u = x+2$

$du = dx$

7) $$\int \frac{3x^3-4x^2+3x}{x^2+1}\,dx = \int \left(3x - 4 + \frac{4}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \int 3x\,dx - 4\int dx + 4\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{3x^2}{2} - 4x + 4\,ang\,\tan x + C$$

8) $$\int \frac{\sec x \tan x}{9+4\sec^2 x}\,dx = \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2\sec x \tan x\,dx}{9+4\sec^2 x}$$

$$a^2 = 9 \qquad u^2 = 4\sec^2 x$$

$$a = 3 \qquad u = 2\sec x$$

$$du = 2\left(\sec x \tan x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\, ang \tan \frac{2\sec x}{3}\right) + C$$

$$= \frac{1}{6}\, ang \tan\left(\frac{2}{3}\sec x\right) + C$$

9) $$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \underbrace{\int x\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx}_{I_1} + \underbrace{3\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{I_2}$$

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du + 3\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$I_1:\ \int x\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{2}\,2u^{\frac{1}{2}} + C_1 = -u^{\frac{1}{2}} + C_1 = -\sqrt{1-x^2} + C_1$$

$$u = 1-x^2$$

$$du = -2x\,dx$$

$$I_2:\ 3\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 3\, ang \operatorname{sen} x + C_2$$

$$\Rightarrow \int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + 3\, ang \operatorname{sen} x + C$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1}\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) + 3\ ang\ \text{sen}\ x + C$$

$$= -\sqrt{1 - x^2} + 3\ ang\ \text{sen}\ x + C$$

2.5 Integral de la función de la forma $f(u) = \frac{1}{u}$ cuyo resultado involucra a la función logaritmo natural

Sea la función $f(u) = \frac{1}{u}$ tal que $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

Ejemplos

1) $\int \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}\, dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\text{sen}\, x| + C$

$u = \text{sen}\, x$

$du = \cos x\, dx$

2) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)}\, dx = \int \frac{du}{u} = \int_e^{e^2} \frac{1\, dx}{x(\ln x)} = \ln(\ln x)\Big]_e^{e^2}$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}\, dx$

$$= \ln\left(\ln e^2\right) - \ln(\ln e)$$

$$= \ln(2 \ln e) - \ln(1)$$

$$= \ln(2) - 0$$

$$= \ln(2)$$

3) $$\int_0^2 \frac{x^2-2}{x+1}\,dx = \int_0^2 \left(x-1-\frac{1}{x+1}\right) dx = \int_0^2 (x-1)\,dx - \int_0^2 \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Bigg]_0^2 - x\Bigg]_0^2 - \ln(x+1)\Bigg]_0^2$$

$$= \underbrace{(2-0)-(2-0)}_{0} - \left[\ln(3) - \underbrace{\ln(1)}_{0} \right]$$

$$= -\ln(3)$$

FÓRMULAS BÁSICAS QUE INVOLUCRAN A LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

$$\int \sec u\; du = \ln \left| \sec u + \tan u \right| + C$$

$$\int \csc u\; du = \ln \left| \csc u - \cot u \right| + C$$

2.6 La regla de L'Hôpital y sus aplicaciones a formas indeterminadas de límites de funciones

Sea $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Si $f(a)=0$ y $g(a)=0$, se tiene una indeterminación en $x=a$, esto es, $\dfrac{0}{0}$.

Entonces, interesa determinar $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Para realizar este cálculo, se considerará el siguiente teorema.

TEOREMA

a) Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en el intervalo abierto I, excepto posiblemente en el número $a \in \mathrm{I}$.

b) $\forall\ x \neq a\,,\ a \in \mathrm{I}\,,\ g'(x) \neq 0$

c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0\,,\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

d) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

por lo tanto, se cumple:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

la generalización de este teorema es:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} \ldots = \lim_{x \to a} \frac{f^{n}(x)}{g^{n}(x)}$$

Esta regla se aplica cuando en el límite se obtiene: $\dfrac{0}{0}$

También se aplica en el caso $\dfrac{\infty}{\infty}$. Para la demostración de esto último, se puede consultar el libro de título *Calculus ,* autor Apostol, editorial Reverté.

Ejemplos

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan x} = \dfrac{0}{0}$

RESOLUCIÓN:

Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sec^2 x} = \lim_{x \to 0} \cos^2 x = 1$$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{\infty}{\infty}$

RESOLUCIÓN:

Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2x} = 0$$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\csc x} = \dfrac{\infty}{\infty}$

RESOLUCIÓN:

Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(-\cos x)(x)} = -\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x \cos x} = \frac{0}{0}$$

nuevamente, aplicando L'Hôpital:

$$-\lim_{x \to 0} \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{-x \operatorname{sen} x + \cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

Otras indeterminaciones que se presentan en el cálculo de límites son:

$$(0)(\infty), \quad \infty - \infty, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad 0^0$$

En estos casos, no es posible aplicar la regla de L'Hôpital, sin embargo, mediante algunos artificios algebraicos y / o propiedades, se puede obtener alguna de las indeterminaciones $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$, en las cuales es posible emplear la regla de L'Hôpital.

A continuación, tenemos algunos ejemplos donde se ilustra lo anterior.

Ejemplos

Calcular:

1) $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$

RESOLUCIÓN:

Si $F(x) = x \ln x$, entonces, $F(x) = f(x)\ g(x)$

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)\ g(x) = \lim_{x \to 0^+} x \ln x$$

donde $f(x) = x$, $g(x) = \ln x$

Aplicando el límite:

$$\lim_{x \to 0^-} x \ln x = (0)\ (\infty)$$

esta indeterminación no permite aplicar la regla de L'Hôpital.

Luego, lo que conviene es buscar una alternativa para obtener $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, si hacemos:

$$F(x) = f(x) \bullet g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = f(x) \bullet \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = g(x) \bullet \frac{1}{\frac{1}{f(x)}}$$

para el ejemplo planteado:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

La forma de indeterminación anterior ya permite el empleo de la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0 \quad \therefore \quad \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$

RESOLUCIÓN:

$$F(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \qquad \lim_{x \to 1} F(x) = \lim_{x \to 1} \left[f(x) - g(x) \right]$$

$$F(x) = f(x) - g(x)$$

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty$$

con esta indeterminación no es posible aplicar la regla de L'Hôpital.

Si efectuamos algún proceso algebraico para obtener $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$ en este caso, se

obtiene el común denominador de la diferencia de funciones:

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x \ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x \ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0}$$

y con esta indeterminación, podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

De la última expresión, derivamos numerador y denominador:

$$\frac{d}{dx}\left[x \ln x - (x-1) \right] = x \bullet \frac{1}{x} + \ln x - 1 = 1 + \ln x - 1 = \ln x$$

$$\frac{d}{dx}\left[(x-1) \ln x \right] = (x-1) \bullet \frac{1}{x} + \ln x (1) = (x-1)\left(\frac{1}{x} \right) + \ln x$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x \ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{(x-1)\left(\frac{1}{x} \right) + \ln x} = \frac{0}{0}$$

según podemos observar, después de aplicar la regla de L'Hôpital, la indeterminación continúa, entonces, nuevamente aplicamos L'Hôpital:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(x-1)\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x = (x-1)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)(1) + \frac{1}{x}$$

$$= -\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}$$

así que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x-1)\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x^2}}\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

3) $\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$

RESOLUCIÓN:

En principio, se aplica directamente el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty$$

como en el caso anterior, esta indeterminación no permite aplicar la regla de L'Hôpital. Así que debemos llevarlo a la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, podemos escribir la función de la siguiente manera (que da lugar a un cociente):

$$\cot x - \frac{1}{x} = \frac{\cot x}{x}\left(x - \frac{1}{\cot x}\right)$$

sabemos que:

$$\tan x = \frac{1}{\cot x}$$

luego:

$$\cot x - \frac{1}{x} = \frac{1}{x \tan x}\left(x - \tan x \right)$$

$$= \frac{x - \tan x}{x \tan x}$$

aplicamos el límite:

$$\lim_{x \to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x \tan x} = \frac{0}{0}$$

por tanto, ya es aplicable L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x \tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sec^2 x}{x \sec^2 x + \tan x}$$

utilizando las identidades:

$$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad ; \quad \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sec^2 x}{x \sec^2 x + \tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{x}{\cos^2 x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}}{\dfrac{x + \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x + \operatorname{sen} x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x} = \frac{0}{0}$$

nuevamente se aplica L'Hôpital, pero antes se simplifica como se muestra:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-2\operatorname{sen}^2 x}{2x + \operatorname{sen} 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-4 \operatorname{sen} x \cos x}{2 + 2\cos 2x} = \frac{0}{4} = 0 \quad \therefore \quad \lim_{x \to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = 0$$

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x} \right)^{x}$

RESOLUCIÓN:

Esta expresión se puede escribir como:

$$\phi(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x}$$

por lo que, ahora, interesa calcular:

$$\lim_{x \to \infty} \phi(x) = \lim_{x \to \infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x}$$

aplicando el límite:

$$\lim_{x \to \infty} \phi(x) = 1^{\infty}$$

para una indeterminación de este tipo, conviene proceder de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to \infty} \phi(x) = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x}$$

tomando $\ln$ en ambos miembros y aplicando propiedades de la función logaritmo natural:

$$\lim_{x \to \infty} \ln \phi(x) = \lim_{x \to \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x} = \lim_{x \to \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \infty \bullet 0$$

Esta es una indeterminación en la que no aplica la regla de L'Hôpital.
Nos interesa obtener una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$, por lo que para el producto $f(x) \bullet g(x)$, según ya vimos:

$$\lim_{x \to \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \bullet \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

de aquí, ya podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

recordando que:

$$\lim_{x \to \infty} \ln \phi\left(x\right) = \lim_{x \to \infty} f\left(x\right)^{g\left(x\right)}$$

Entonces, aplicamos la función exponencial, que es la función inversa de la función logaritmo natural para obtener finalmente:

$$\lim_{x \to \infty} \phi(x) = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

5) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{e^{-x}}$

RESOLUCIÓN:

$$\lim_{x \to \infty} \phi\left(x\right) = \lim_{x \to \infty} f\left(x\right)^{g\left(x\right)} = \lim_{x \to \infty} x^{e^{-x}} = \infty^0$$

se toma ln en $\phi\left(x\right) = x^{e^{-x}}$

$$\lim_{x \to \infty} \ln \phi\left(x\right) = \lim_{x \to \infty} \ln x^{e^{-x}} = \lim_{x \to \infty} e^{-x} \ln x$$

Aplicando el límite en el segundo miembro:

$$\lim_{x \to \infty} \ln \phi\left(x\right) = \lim_{x \to \infty} e^{-x} \ln x = \left(0\right)\left(\infty\right)$$

Se obtiene una indeterminación en la cual no es posible aplicar la regla de L'Hôpital.

Para el caso es un producto, el cual debe llevarse a forma de cociente:

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} \ln x = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\frac{1}{e^{-x}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{e^{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

como ya es aplicable L'Hôpital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x\, e^{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

así, se tiene

$$\lim_{x \to \infty} \ln \phi(x) = \lim_{x \to \infty} e^{-x} \ln x = 0$$

pero el problema a resolver es:

$$\lim_{x \to \infty} \phi(x) = \lim_{x \to \infty} x^{e^{-x}}$$

Por lo tanto, para obtener este límite, aplicamos la función exponencial:

$$\lim_{x \to \infty} e^{\ln(\phi(x))} = e^{(0)} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \phi(x) = \lim_{x \to \infty} x^{e^{-x}}$$

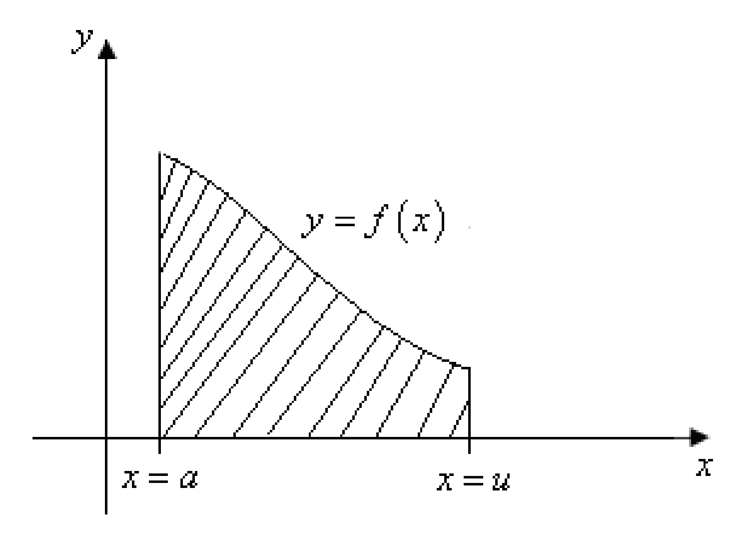
Entonces, finalmente

$$\lim_{x \to \infty} x^{e^{-x}} = 1$$

2.7 La integral impropia

Sea una función f continua en un cierto intervalo $[a, \infty)$, siempre positiva y que cumple con el siguiente límite:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$



Si $u > a$, siendo u, $a \in D_f$ (dominio de la función f), entonces, el área $A(u)$ bajo la curva entre a y u está dada por la expresión:

$$A(u) = \int_a^u f(x)\, dx$$

si en esta expresión el $\lim_{x \to \infty} A(u)$ existe, entonces el límite puede ser interpretado como el área bajo la curva $y = f(u)$, sobre el eje x y hacia la derecha de $x = a$, y el símbolo que se usa para denotar este valor es:

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)\, dx}$$

Ahora bien, de forma más general diremos que, si se tiene una función f, continua en el intervalo $[a, \infty)$, por definición:

(A) $$\boxed{\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{u \to \infty} \int_a^u f(x)\, dx \quad \text{si el límite existe}}$$

De manera similar, si f es continua en el intervalo $(-\infty, a)$, se define:

(B) $$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{u \to -\infty} \int_{u}^{a} f(x)\,dx$$

considerada como el área bajo la curva, sobre el eje x y a la izquierda de $x = a$. Las expresiones (A) y (B) son llamadas integrales impropias. La diferencia de estas integrales con las integrales definidas se debe a que uno de los límites de integración no es un número real.

Las integrales impropias se dice que convergen cuando al tender $u \to \infty$, $u \to -\infty$, el lado derecho de la ecuación existe. (Es decir, que el límite que se da en el lado derecho de A y B existe).

Cuando no es así, (es decir, que $\lim \nexists$) se dice que la integral diverge.

También, las integrales impropias se presentan con dos límites de integración. De manera específica, si f es continua $\forall\ x$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces por definición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx \text{, o bien,}$$

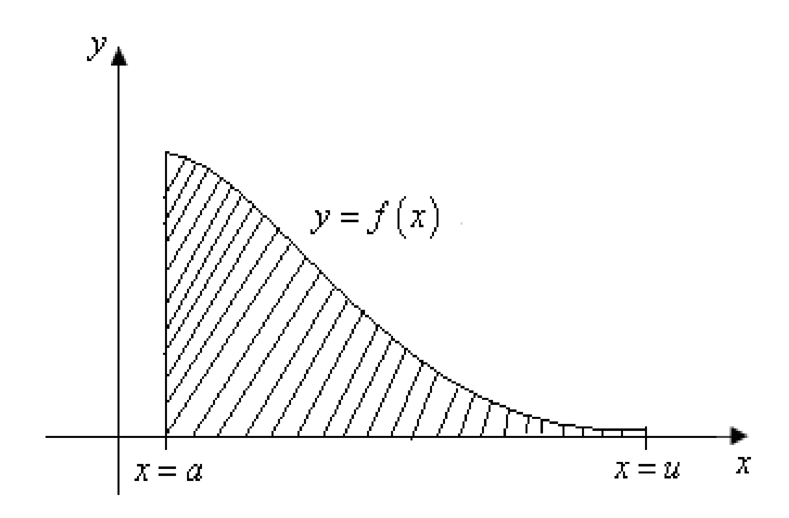
(C) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{u \to -\infty} \int_{u}^{a} f(x)\,dx + \lim_{v \to \infty} \int_{a}^{v} f(x)\,dx$$

Si las dos integrales laterales convergen, la integral impropia converge. Si una de ellas diverge, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ se dice que diverge.

$\int_{a}^{u} f(x)\,dx$ determina el área bajo la curva $y = f(x)$ y el límite indicado es igual a esta área.

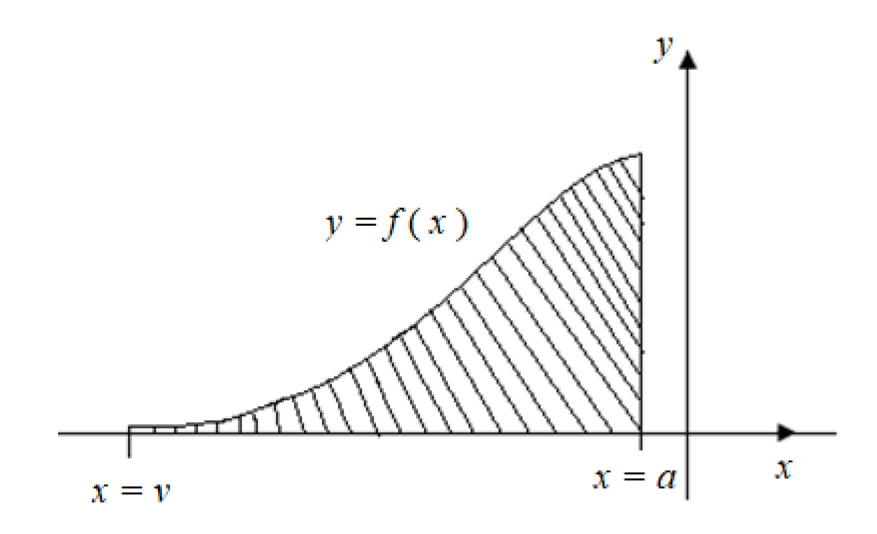
Enseguida, se presentan las gráficas correspondientes a los casos anteriores.

(A)



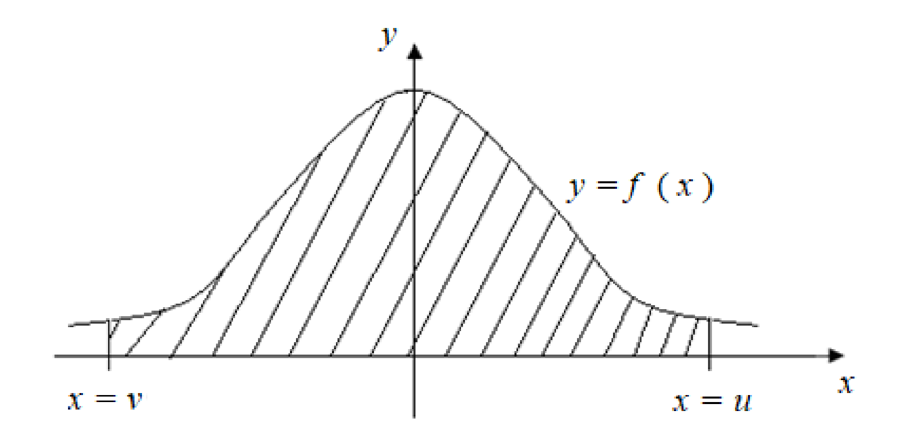
$$A(u) = \lim_{u \to \infty} \int_a^u f(x)\, dx = \int_a^{\infty} f(x)\, dx$$

(B)



$$A(u) = \lim_{v \to -\infty} \int_v^a f(x) dx = \int_{-\infty}^{a} f(x) dx$$

(C)



$$A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{v \to -\infty} \int_{v}^{a} f(x)\,dx + \lim_{u \to \infty} \int_{a}^{u} f(x)\,dx$$

$$-\infty < a < \infty$$

Resumiendo:

Las integrales (A), (B) y (C) son llamadas integrales impropias y se identifican cuando uno o ambos extremos de integración no son números reales.

En las integrales impropias se dice que convergen cuando el límite existe, si no es así (el límite no existe), se dice que la integral impropia diverge.

Ilustramos estos conceptos con los ejemplos que se presentan a continuación.

Ejemplos

Dterminar si las siguientes integrales impropias convergen o divergen:

1) $$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{u \to \infty} \int_{2}^{u} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{x \to u} \int_{2}^{u} (x-1)^{-2}\,dx \leftarrow \int_{2}^{u} u^n\,du$$

$$u = x - 1$$

$$du = dx$$

$$= \lim_{u \to \infty} \left. \frac{(x-1)^{-1}}{-1} \right]_2^u = \lim_{u \to \infty} \left. \frac{-1}{(x-1)} \right]_2^u$$

$$\lim_{u \to \infty} \left[\frac{-1}{u-1} - \frac{-1}{(2-1)} \right] = \lim_{u \to \infty} \frac{-1}{u-1} + \lim_{u \to \infty} \frac{1}{1} = 0 + 1 = 1$$

el límite existe, por lo tanto, la integral converge y tiene el valor de 1.

2) $$\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1}\, dx = \lim_{u \to \infty} \int_2^{u} \frac{1}{x-1}\, dx = \lim_{u \to \infty} \left[\ln(x-1) \right]_2^u =$$

$$= \lim_{u \to \infty} \left[\ln(u-1) - \ln(2-1) \right] = \lim_{u \to \infty} \ln(u-1) - \lim_{u \to \infty} \ln(1)$$

$= \infty$, con más precisión diremos que el límite no existe

En este caso, al no existir el límite, la integral diverge.

3) $$\int_{2\pi}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\, dx = \lim_{u \to \infty} \int_{2\pi}^{u} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\, dx \leftarrow \int \cos u \; dx$$

$$u = \frac{1}{x}$$

$$du = -\frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \lim_{u \to \infty} \left[-\int_{2\pi}^{u} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\, dx \right]$$

$$= \lim_{u \to \infty} - \left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right]_{2\pi}^{u}$$

$$= -\lim_{u \to \infty} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right]_{2\pi}^{u}$$

$$= -\lim_{u \to \infty} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{u}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2\pi}\right) \right] = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2\pi}\right)$$

4) $$\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{u \to -\infty} \int_{u}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{u \to -\infty} \int_{u}^{2} (4-x)^{-2}\, dx$$

$$= \lim_{u \to -\infty} (-1) \int_{u}^{2} (4-x)^{-2} (dx) = \lim_{u \to -\infty} \left[\frac{1}{4-x} \right] \Bigg|_{u}^{2}$$

$$= \lim_{u \to -\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4-u} \right] = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

por lo tanto, el límite existe y la integral converge.

5) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= \lim_{u \to -\infty} \int_{u}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \lim_{v \to \infty} \int_{0}^{v} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$u^2 = x^2, \quad u = x, \quad du = dx$$

$$= \lim_{u \to -\infty} \left[ang \tan x \right]_{u}^{0} + \lim_{v \to \infty} \left[ang \tan x \right]_{0}^{v}$$

$$= \lim_{u \to -\infty} \left[ang \tan(0) - ang \tan(u) \right]$$

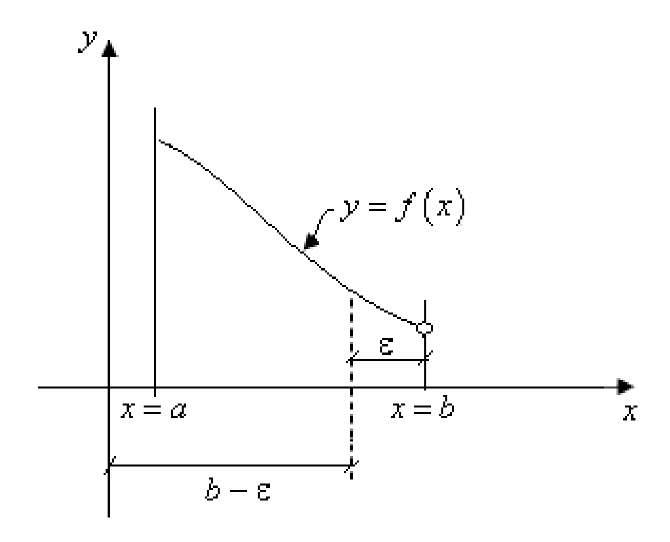
$$+ \lim_{v \to \infty} \left[ang \tan(v) - ang \tan(0) \right]$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

En el estudio de las integrales impropias puede ocurrir que el integrando presente uno o más puntos de discontinuidad en el intervalo $a \le x \le b$, como se muestra a continuación, por lo que se deberá tomar en cuenta las consideraciones indicadas.

FUNCIONES CON INTEGRANDO DISCONTINUO

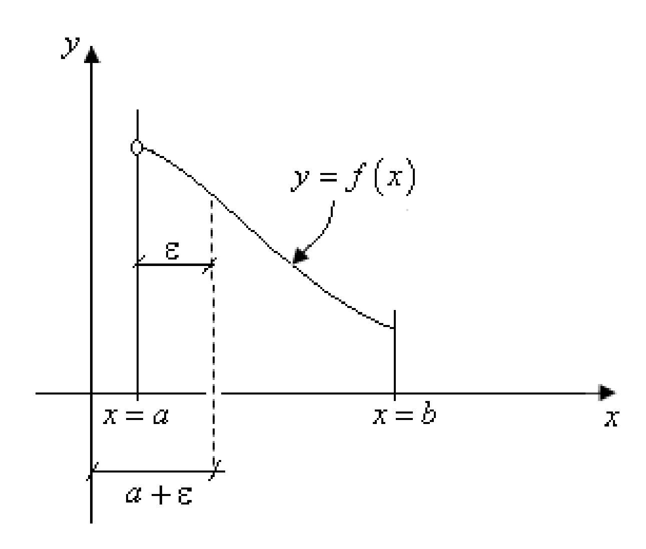
a) Sea $f(x)$ continua en $a \le x < b$, pero discontinua en $x = b$, es decir, discontinua en el extremo superior del intervalo; se establece que $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, si el límite existe. La gráfica siguiente ilustra lo anterior:



b) Sea $f(x)$ continua en el intervalo $a < x \le b$, pero discontinua en $x = a$, es decir, discontinua en el extremo inferior del intervalo; se establece que:

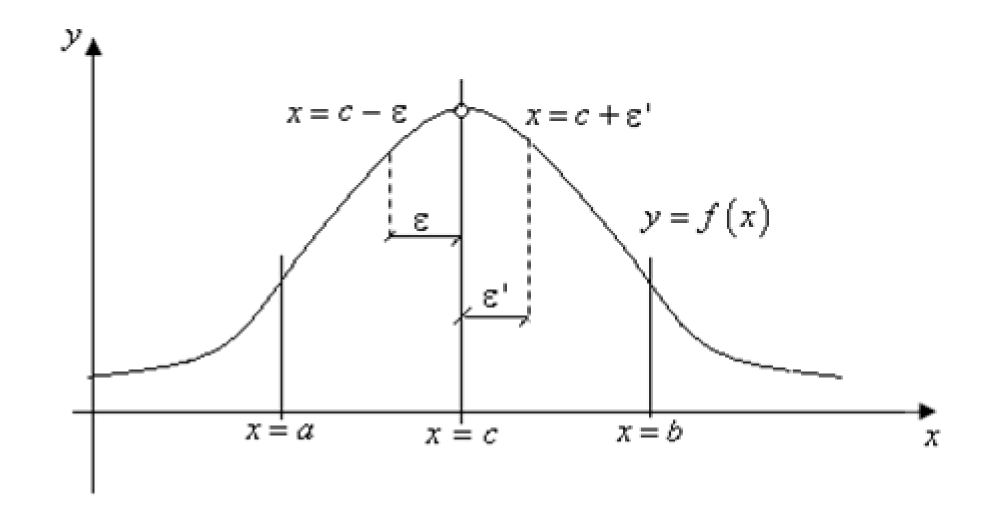
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \text{, si el límite existe}$$

La gráfica siguiente ilustra este caso:



c) Sea $f(x)$ continua para toda x en el intervalo $a \le x \le b$, excepto en $x = c$ con $a < c < b$, se establece que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon' \to 0^+} \int_{c-\varepsilon'}^{b} f(x)\,dx$$, si ambos límites existen.



Ejemplos

Calcular las integrales siguientes:

1) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

RESOLUCIÓN:

El integrando es discontinuo en $x = 3$ y este es uno de los extremos de integración (el extremo superior), por lo cual consideramos lo anteriormente desarrollado:

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{3-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[ang\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{3}\right)\right]\Bigg|_0^{3-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[ang\,\text{sen}\left(\frac{3-\varepsilon}{3} \right) - ang\,\text{sen}\left(\frac{0}{3} \right) \right]$$

$$= ang\,\text{sen}\,(1) - ang\,\text{sen}\,(0)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \ \text{el límite existe y la integral converge}$$

2) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$

RESOLUCIÓN:

Se observa que el integrando es discontinuo en $x = 1$, $1 \in [0, 4]$, o bien, $0 \leq 1 \leq 4$ (estamos en el tercero de los casos mostrados), entonces, para este ejemplo tenemos:

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon' \to 0^+} \int_{1+\varepsilon'}^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\frac{1}{x-1} \right] \Bigg|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon' \to 0^+} \int_{1+\varepsilon'}^4 \left[-\frac{1}{x-1} \right] \Bigg|_{1+\varepsilon'}^4$$

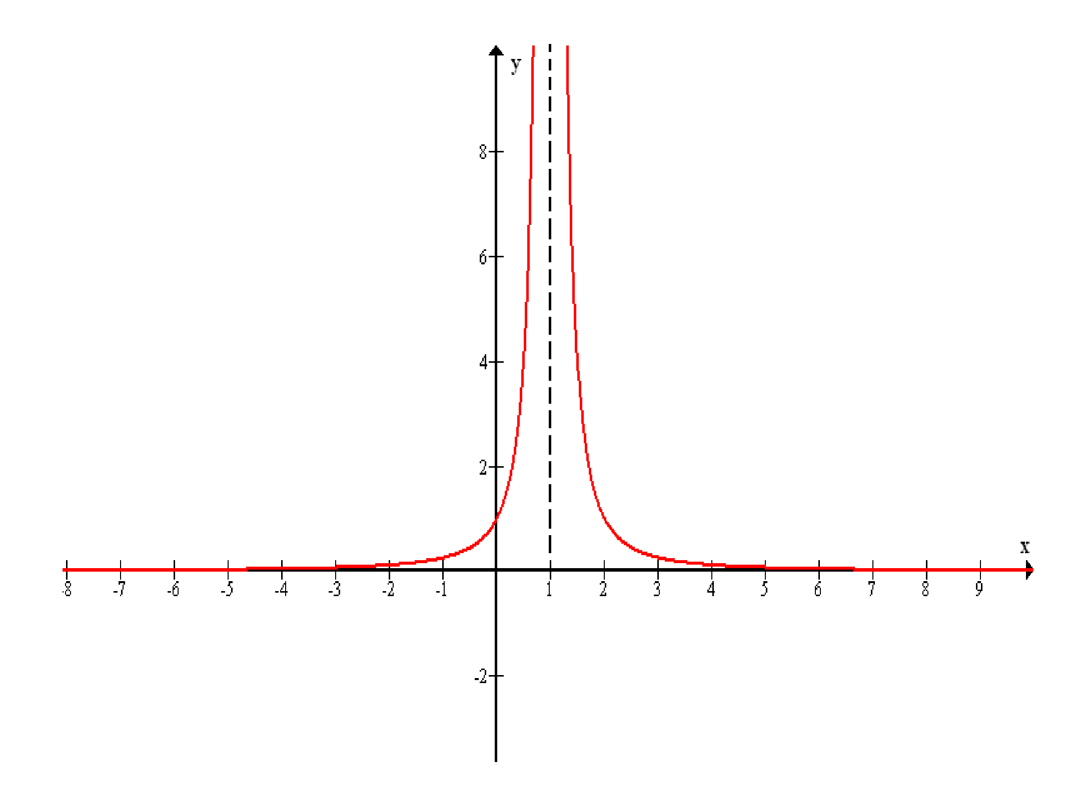
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{-1}{(1-\varepsilon-1)} + \frac{1}{(0-1)} \right] + \lim_{\varepsilon' \to 0^+} \left[\frac{-1}{(4-1)} + \frac{1}{(1+\varepsilon'-1)} \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{-1}{(-\varepsilon)} - 1 \right] + \lim_{\varepsilon' \to 0^+} \left[\frac{-1}{3} + \frac{1}{\varepsilon'} \right]$$

$$= (\infty - 1) + \left(\frac{-1}{3} + \infty \right) = \infty + \infty$$

estos límites no existen, por lo tanto, la integral diverge.

Gráficamente, se tiene:



TEMA 3

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

El objetivo central de este tema es aplicar los conocimientos adquiridos en los temas anteriores, a la resolución de integrales de mayor complejidad, que las ya estudiadas en el tema 2, así como en algunas aplicaciones básicamente geométricas. Para facilitar este estudio, el tema se ha dividido en dos apartados principales que permitirán abordar más fácilmente los conceptos a tratar.

El primer apartado se refiere a los métodos de integración y el segundo a las aplicaciones señaladas en el programa de la asignatura Cálculo Integral.

Con objeto de facilitar el proceso de resolución de las integrales que no son inmediatas y que tampoco es posible resolverlas con un cambio de variable elemental, es conveniente establecer algunas características generales de las funciones que constituyen el integrando, y que permitirán ubicarlas dentro de alguno de los métodos que existen para resolver integrales diversas.

Consideremos las siguientes integrales:

$$\int x e^{x} dx \,, \qquad \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\, dx \,, \qquad \int_2^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2 - 16}}$$

En cada caso, se observa que la función integrando presenta una forma tal, que no es sencillo obtener la antiderivada general empleando las integrales inmediatas conocidas, por tal motivo, para determinar tal función, es necesario recurrir a algunos de los métodos más convenientes para abordar este tipo de problemas, entre los cuales destacan los siguientes:

- Integración por partes
- Integración de expresiones trigonométricas e integración por sustitución trigonométrica
- Integración por descomposición en fracciones parciales

3.1 Integración por partes

Sean u y v dos funciones diferenciables, al diferenciar el producto uv se tiene:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

Despejando el término $u\,dv$

$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

Integrando ambos miembros:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

donde $u = u(x), \quad v = v(x)$

La aplicación de esta expresión se conoce como método de integración por partes. Ahora bien, ¿cuándo aplica este método? En general, considerando que

1) El integrando es un producto de funciones (que no generan integrales inmediatas).

2) La elección de u y dv será tal que u sea diferenciable y dv sea integrable, además, de que la nueva integral $\int v\,du$ deberá ser más simple que la original.

Ejemplos

1) Calcular la integral $\int x e^x\,dx$

RESOLUCIÓN:

$$\int x e^x\,dx = \left(e^x + c_1\right)x - \int\left(e^x + c_1\right)dx$$

$u = x \qquad\qquad du = dx$

$dv = e^x\,dx \qquad\qquad v = e^x + c_1$

$$\int x e^x\,dx = xe^x + c_1 x - e^x - c_1 x + c_2$$

$$= xe^x - e^x + c_2$$

2) Calcular la integral $\int x^2 \ln x \, dx$

RESOLUCIÓN:

$$u = \ln x \qquad dv = x^2 \, dx$$

$$du = \frac{1}{x} \, dx \qquad v = \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c$$

Ejemplos

Calcular:

1) $\int x^2 e^2 \, dx$ (Doble Integración por partes)

RESOLUCIÓN:

$$u = x^2 \qquad dv = e^x \, dx$$

$$du = 2x \, dx \qquad v = \int e^x \, dx = e^x$$

$$uv - \int v \, du = x^2 e^x - \int e^x (2x \, dx)$$

Nuevamente, integrando por partes:

$$u = x \qquad dv = e^x \, dx$$

$$du = dx \qquad v = e^x$$

$$x^2 e^x - 2 \left[x e^x - \int e^x \, dx \right] = x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + c$$

2) $\int x \operatorname{sen} x \, dx$

RESOLUCIÓN:

$$u = x \qquad dv = \operatorname{sen} x \, dx$$

$$du = dx \qquad v = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$$

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$$

3) $\int e^x \cos x \, dx$ (Doble Integración por partes y despejar la integral de interés)

RESOLUCIÓN:

$$u = e^x \qquad dv = \cos x \, dx$$

$$du = e^x \, dx \qquad v = \operatorname{sen} x$$

$$I = e^x \operatorname{sen} x - \int \underbrace{e^x \operatorname{sen} x \, dx}_{I_1}$$

$$I_1 = \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x \, dx + \int \cos x \, e^x \, dx$$

$$u = e^x \qquad dv = \operatorname{sen} x \, dx$$

$$du = e^x \, dx \qquad v = -\cos x$$

Sustituyendo I_1 en I

$$I = e^x \operatorname{sen} x - \left[-e^x \cos x + \int \cos x \, e^x \, dx \right]$$

$$I = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int \cos x \, e^x \, dx$$

pero $I = \int e^x \cos x \, dx$, entonces

$$\int \cos x e^x \, dx + \int \cos x e^x \, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + c$$

$$2 \int \cos x e^x \, dx = e^x \left(\operatorname{sen} x + \cos x \right) + c$$

$$\int \cos x e^x \, dx = \frac{1}{2} e^x \left(\operatorname{sen} x + \cos x \right) + c$$

4) $\int \ln x \, dx$

RESOLUCIÓN:

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = x$$

$$I = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$$

5) $\int ang \tan x \, dx$

RESOLUCIÓN:

$$u = ang \tan x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{1 + x^2} dx \qquad v = \int dx = x$$

$$I = x \, ang \tan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$I = x \, ang \tan x - \frac{1}{2} \ln \left(1 + x^2 \right) + c$$

6) $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$

RESOLUCIÓN:

La integral se puede expresar como $\int x e^{x}(x+1)^{-2}\,dx$

$$u = x e^{x} \qquad dv = (x+1)^{-2}\,dx$$

$$du = e^{x}(x+1)\,dx \qquad v = \int (x+1)^{-2}\,dx = -\frac{1}{x+1}$$

$$I = -\frac{x e^{x}}{x+1} + \int \frac{1}{x+1}\, e^{x}(x+1)\,dx = -\frac{x e^{x}}{x+1} + e^{x} + c$$

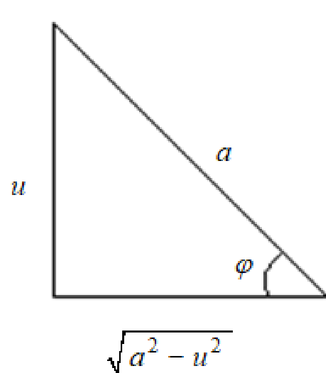
3.2 Integrales de expresiones trigonométricas e integración por sustitución trigonométrica

Este método es aplicable cuando el integrando contiene expresiones de la forma:

$$\sqrt{a^2 - u^2} \quad ; \quad \sqrt{a^2 + u^2} \quad ; \quad \sqrt{u^2 - a^2}$$

CASO I

Se tiene en el integrando $\sqrt{a^2 - u^2}$; $u = u(x)$



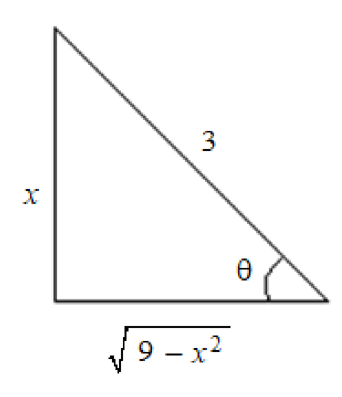
$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{u}{a} \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a}$$

$$u = a \operatorname{sen}\varphi \qquad \sqrt{a^2 - u^2} = a\cos\varphi$$

$$du = a\cos\varphi\, d\varphi$$

Ejemplos

1) $\int \sqrt{9 - x^2}\ dx$



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3} \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}$$

$$x = 3\operatorname{sen}\theta \qquad \sqrt{9 - x^2} = 3\cos\theta$$

$$dx = 3\cos\theta\, d\theta$$

$$\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$\sqrt{9 - x^2} = \frac{x}{\tan\theta} = x\cot\theta = 3\operatorname{sen}\theta\,\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 3\cos\theta$$

$$\int \sqrt{9 - x^2}\ dx = \int 3\cos\theta\ 3\cos\theta\ d\theta = 9\int \cos^2\theta\ d\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2u$$

$$I = 9\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = 9\int \frac{1}{2}\, d\theta + 9\int \frac{1}{2}\cos 2\theta\ d\theta$$

$$I = \frac{9}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right] + c$$

Se debe expresar en términos de la variable original:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3} \qquad \theta = ang\operatorname{sen}\frac{x}{3}$$

$$\operatorname{sen} 2u = 2\cos u \operatorname{sen} u \quad ; \quad \operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

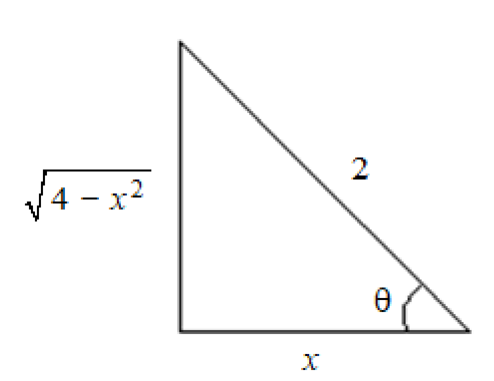
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}$$

$$I = \frac{9}{2} ang\operatorname{sen}\frac{x}{3} + \frac{9}{4}\left(2\operatorname{sen}\theta \cos\theta\right) + c$$

$$I = \frac{9}{2} ang\operatorname{sen}\frac{x}{3} + \frac{9}{2}\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}\right) + c$$

$$I = \frac{9}{2} ang\operatorname{sen}\frac{x}{3} + \frac{1}{2} x\sqrt{9 - x^2} + c$$

2) $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$



$$\cos\theta = \frac{x}{2} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}$$

$$x = 2\cos\theta$$

$$dx = -2\operatorname{sen}\theta\, d\theta \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4 - x^2} = 2\operatorname{sen}\theta$$

$$\int \sqrt{4 - x^2}\; dx = \int 2\,\text{sen}\,\theta\,(-2\,\text{sen}\,\theta\; d\theta) = -4 \int \text{sen}^2\theta\; d\theta$$

$$\text{sen}^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta$$

$$-4 \int \text{sen}^2\theta\; d\theta = -4 \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = -\frac{4}{2}\int d\theta + \frac{4}{2}\int \cos 2\theta\; d\theta$$

$$I = -2\theta + \text{sen}\,2\theta + c$$

En términos de la variable original:

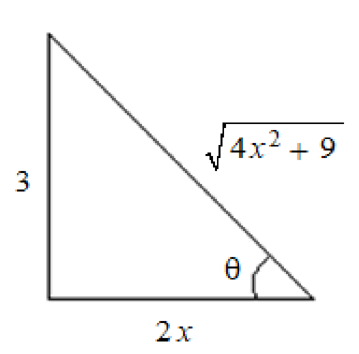
$$\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \qquad \theta = ang\cos\frac{x}{2}$$

$$I = -2\,ang\cos\frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

CASO II

El integrando presenta un radical del tipo $\sqrt{u^2 + a^2}$ o bien $\sqrt{a^2 + u^2}$

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 + 9}}$



$$\tan\theta = \frac{3}{2x} \qquad x = \frac{3}{2\tan\theta} = \frac{3}{2}\cot\theta$$

$$dx = -\frac{3}{2}\csc^2\theta\; d\theta$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{3}{\sqrt{4x^2 + 9}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4x^2 + 9} = \frac{3}{\text{sen}\,\theta} = 3\csc\theta$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \int -\frac{\left(\frac{3}{2}\right)\csc^2\theta\, d\theta}{\left(\frac{3}{2}\right)\cot\theta\,(3\csc\theta)} = -\frac{1}{3}\int \frac{\csc\theta}{\cot\theta}\, d\theta$$

$$\frac{\csc\theta}{\cot\theta} = \sec\theta \qquad\qquad I = -\frac{1}{3}\int \sec\theta\, d\theta$$

$$\int \sec u\, du = \ln\left|\sec u + \tan u\right| + c$$

$$I = -\frac{1}{3}\ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + c$$

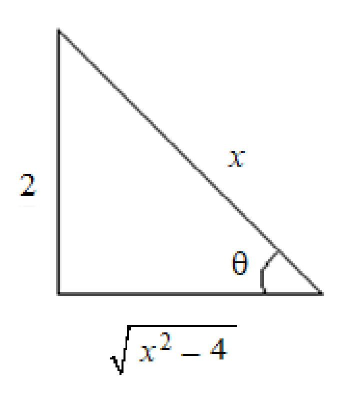
En términos de la variable original

$$I = -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+9}+3}{2x}\right| + c$$

CASO III

El integrando presenta un radical del tipo $\sqrt{u^2 - a^2}$

1) $$\int \frac{dx}{\left(x^2-4\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{\left(x^2-4\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2-4\right)} = \int \frac{dx}{\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2-4}}$$



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{2}{\operatorname{sen}\theta} = 2\csc\theta$$

$$dx = -2\csc\theta\,\cot\theta\,d\theta$$

$$\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{x^2-4}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{x^2-4} = \frac{2}{\tan\theta} = 2\cot\theta$$

$$x^2 - 4 = 4\cot^2\theta$$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2-4}} = -\int \frac{2\csc\theta\,\cot\theta\,d\theta}{4\cot^2\theta\left(2\cot\theta\right)}$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{\csc\theta}{\cot^2\theta}\,d\theta = -\frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

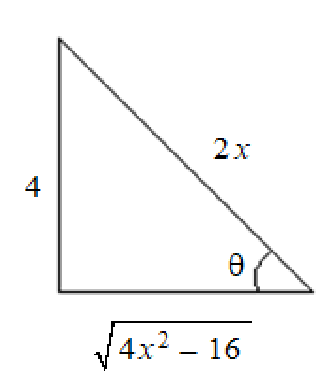
$$= \frac{1}{4}\,\frac{\left(\cos\theta\right)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{4\cos\theta} + c = -\frac{1}{4}\sec\theta + c$$

En términos de x:

$$\sec\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$I = -\frac{1}{4}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right) + c$$

2) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-16}}$$



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{2x} = \frac{2}{x}$$

$$x = \frac{2}{\operatorname{sen}\theta} = 2\csc\theta \qquad dx = -2\csc\theta\cot\theta\, d\theta$$

$$\tan\theta = \frac{4}{\sqrt{4x^2-16}} \qquad \sqrt{4x^2-16} = \frac{4}{\tan\theta}$$

$$\sqrt{4x^2-16} = 4\cot\theta$$

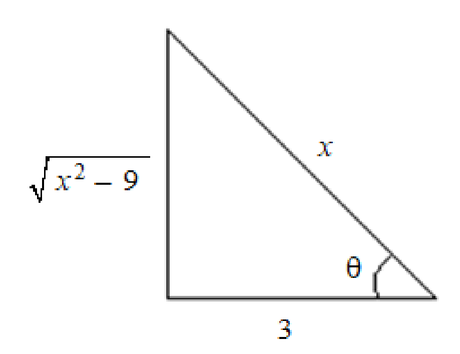
$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-16}} = \int \frac{-2\csc\theta\cot\theta\, d\theta}{(2\csc\theta)^2\,(4\cot\theta)} = -\frac{2}{16}\int \frac{1}{\csc\theta}\, d\theta$$

$$-\frac{1}{8}\int \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\frac{1}{8}(-\cos\theta) = \frac{1}{8}\cos\theta$$

$$I = \frac{1}{8}\cos\theta \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{4x^2-16}}{2x}$$

$$I = \frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{4x^2-16}}{2x}\right) + c$$

3) $\displaystyle\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\, dx$



$$\cos\theta = \frac{3}{x} \qquad x = \frac{3}{\cos\theta} = 3\sec\theta \qquad \Rightarrow \qquad dx = 3\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta$$

$$\sqrt{x^2 - 9} = 3\tan\theta$$

Cuando se efectúa la sustitución en la integral original, se tiene:

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}\,dx = \int \frac{3\tan\theta}{3\sec\theta}\,3\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta$$

$$I = 3\int \tan^2\theta\,d\theta \quad ; \qquad \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$$

$$I = 3\int \left(\sec^2\theta - 1\right)d\theta = 3\left[\tan\theta - \theta\right]$$

Pero el problema original se refiere a una integral definida en términos de la variable x y el resultado obtenido está en términos de θ, por lo que se debe realizar un cambio en los extremos de integración:

si $x = 3 \qquad \cos\theta = \frac{3}{3} \qquad \cos\theta = 1 \qquad \theta = ang\cos 1 \qquad \theta = 0^\circ$

si $x = 6 \qquad \cos\theta = \frac{3}{6} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \theta = ang\cos\frac{1}{2} \qquad \theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

por lo que se tiene:

$$I = 3\left[\tan\theta - \theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 3\left[\tan\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right] = 3\sqrt{3} - \pi$$

Otra forma de resolverlo es la siguiente:

Si el resultado obtenido se expresa en términos de la variable original x:

$$I = 3\left[\tan\theta - \theta\right] = 3\left(\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3} - ang\cos\left(\frac{3}{x}\right)\right)$$

$$I = \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\, dx = 3\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} - ang\cos\left(\frac{3}{x}\right)\right)\Bigg|_3^6$$

$$= 3\left[\frac{\sqrt{27}}{3} - \frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \sqrt{27} - \pi = 3\sqrt{3} - \pi$$

de cualquiera de las dos formas se obtiene el resultado correcto.

INTEGRACIÓN DE ALGUNAS EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\int \operatorname{sen}^n kx \cos^m kx\, dx \quad ; \qquad \int \tan^m x\, dx \quad ; \qquad \int \cos^m x\, dx$$

Ejemplos

Efectuar las integrales indicadas y emplear las identidades que se consideren convenientes.

RESOLUCIÓN:

1) $$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\, dx = \int \operatorname{sen}^3 x\,(\cos x)^{-\frac{1}{2}}\, dx = \int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 x\,(\cos x)^{-\frac{1}{2}}$$

de la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\int \left(1-\cos^2 x\right)\left(\cos x\right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x\, dx$$

$$\int \left[(\cos x)^{-\frac{1}{2}} - (\cos x)^{\frac{3}{2}}\right] \operatorname{sen} x\, dx = \int (\cos x)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x\, dx - \int (\cos x)^{\frac{3}{2}} \operatorname{sen} x\, dx$$

$$I = -2\left(\cos x\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}\left(\cos x\right)^{\frac{5}{2}} + c$$

2) $$\int \text{sen}^2 x \cos^3 x \, dx = \int \text{sen}^2 x \cos^2 x \cos x \, dx$$

de la identidad pitagórica $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$

$$\int \left(\text{sen}^2 x\right)\left(1 - \text{sen}^2 x\right)\cos x \, dx$$

$$\int \left(\text{sen}^2 x - \text{sen}^4 x\right)\cos x \, dx = \int \text{sen}^2 x \cos x \, dx - \int \text{sen}^4 x \cos x \, dx$$

$$\text{I} = \frac{\text{sen}^3 x}{3} - \frac{\text{sen}^5 x}{5} + c$$

3) $$\int \cos^4 x \, dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x \, dx$$

$$I = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\text{sen } 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\text{sen } 4x + c$$

$$I = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\text{sen } 2x + \frac{1}{32}\text{sen } 4x + c$$

4) $\int \tan^3 x \sec^3 x \, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \tan x \sec x \, dx$

$$= \int \left(\sec^2 x - 1\right) \sec^2 x \tan x \sec x \, dx$$

$$= \int \left(\sec^4 x - \sec^2 x\right) \sec x \tan x \, dx$$

$$= \int \sec^4 x \sec x \tan x \, dx - \int \sec^2 x \sec x \tan x \, dx$$

$$I = \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + c$$

5) $\int \csc^4 x \cot^4 x \, dx = \int \cot^4 x \csc^2 x \csc^2 x \, dx$

$$\csc^2 x = \cot^2 x + 1$$

$$= \int \left(\cot^4 x\right)\left(\cot^2 x + 1\right) \csc^2 x \, dx$$

$$= \int \cot^6 x \csc^2 x \, dx + \int \cot^4 x \csc^2 x \, dx$$

$$I = -\frac{\cot^7 x}{7} - \frac{\cot^5 x}{5} + c$$

3.3 Integración por descomposición en fracciones parciales (fracciones racionales o simples)

En este subtema estudiaremos un procedimiento para descomponer una función racional en funciones racionales más simples, a las cuales es posible aplicar las fórmulas de integración básicas. Este método se conoce como *método de las fracciones simples*.

Para introducir el método, consideremos la integral:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$$

Para calcularla sin fracciones simples, completamos el cuadrado y usamos sustituciones trigonométricas:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$$

$$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6$$

$$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \frac{dx}{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

esta es una integral de la forma $\int \frac{du}{u^2 - a^2}$ (se puede resolver por sustitución trigonométrica).

Ahora bien, para ver la utilidad del método de las fracciones simples, consideramos que sabemos lo siguiente:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

entonces, la integral la podemos calcular fácilmente como sigue:

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\, dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) dx = \int \frac{1}{x-3}\, dx - \int \frac{1}{x-2}\, dx$$

$$= \ln \left| x - 3 \right| - \ln \left| x - 2 \right| + c$$

Según observamos, este método es preferible al de sustituciones trigonométricas, sin embargo, su uso depende de la habilidad para factorizar el denominador y para encontrar las fracciones simples.

De los antecedentes de Álgebra, recordamos que todo polinomio con coeficientes reales puede factorizarse en factores lineales y cuadráticos irreducibles.

Por ejemplo, el polinomio $x^5 + x^4 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2(x^2+1)$, en este caso es:

$(x-1)$ factor lineal

$(x+1)^2$ factor lineal repetido

(x^2+1) factor cuadrático irreducible

Al emplear esta factorización es posible escribir:

$$\frac{N(x)}{x^5 + x^4 - x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1}$$

Siendo $N(x)$ un polinomio de grado inferior a 5.

En la aplicación de este método, se pueden presentar los casos que desarrollamos a continuación.

Siempre que se presenten fracciones racionales de la forma $\frac{Q(x)}{R(x)}$ donde el grado de $Q(x)$ es menor que el grado de $R(x)$, la fracción puede descomponerse en una suma de fracciones parciales, de acuerdo a los casos que se presentan enseguida.

Es conveniente señalar que, si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, primero deberá efectuarse la división de polinomios.

CASO I

$R(x)$ es factorizable en términos de raíces reales diferentes.

$$\frac{Q(x)}{R(x)} = \frac{Q(x)}{(x-m_1)(x-m_2)...(x-m_n)} = \frac{A_1}{(x-m_1)} + \frac{A_2}{(x-m_2)} + \ldots + \frac{A_n}{(x-m_n)}$$

Ejemplo

Efectuar $\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,dx$

RESOLUCIÓN:

El integrando se puede expresar como $\frac{x+3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-2)}$

Interesa obtener los coeficientes A_1, A_2.

Primer método:

$$(x-1)(x+2)\left[\frac{x+3}{(x-1)(x-2)}\right] = \left[\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2}\right](x-1)(x-2)$$

$$x+3 = A_1(x-2) + A_2(x-1)$$

$$x+3 = A_1 x - 2A_1 + A_2 x - A_2$$

$$x+3 = (A_1 + A_2)x - 2A_1 - A_2$$

$$1 = A_1 + A_2$$

$$3 = -2A_1 - A_2$$

$$4 = -A_1$$

$$A_1 = -4 \quad ; \quad A_2 = 5$$

Segundo método:

Se tiene $x + 3 = A_1 (x - 2) + A_2 (x - 1)$

Asignando a la variable x el valor de cada una de las raíces y sustituyendo en la expresión anterior:

$$\text{si} \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad 5 = A_2$$

$$\text{si} \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad 4 = - A_1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = - 4$$

Al emplear cualquiera de los métodos, se obtienen los mismos valores de las constantes. Finalmente,

$$\int \frac{x + 3}{x^2 - 3x + 2} \, dx = \int - \frac{4}{x - 1} \, dx + \int \frac{5}{x - 2} \, dx$$

$$= - 4 \ln \left| x - 1 \right| + 5 \ln \left| x - 2 \right| + c$$

CASO II

$R (x)$ es factorizable en términos de raíces reales repetidas.

$\dfrac{Q (x)}{R (x)} = \dfrac{Q (x)}{(x - m)^n}$ donde n es el número de veces que se repite la raíz.

$$\frac{Q (x)}{R (x)} = \frac{Q (x)}{(x - m)^n} = \frac{A_1}{(x - m)} + \frac{A_2}{(x - m)^2} + ... + \frac{A_3}{(x - m)^n}$$

Ejemplo

Efectuar $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2} \, dx$

RESOLUCIÓN:

De manera análoga al ejemplo anterior, se debe factorizar el denominador:

$$x^3 - x^2 = x^2(x-1)$$

$$\left(\frac{x^2-1}{x^3-x^2} = \frac{x^2-1}{x^2(x-1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x-1} \right) x^3 - x^2$$

$$x^2 - 1 = A_1 x(x-1) + A_2(x-1) + A_3 x^2$$

Utilizando el segundo método del ejemplo anterior:

si $x = 0 \quad ; \quad A_2 = 1$

si $x = 1 \quad ; \quad A_3 = 0$

si $x = 2 \quad ; \quad A_1 = 1$

$$\int \frac{x^2-1}{x^3-x^2}\,dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = \ln|x| + \left(-\frac{1}{x}\right) + c$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{x} + c$$

Los casos siguientes se ilustran de manera conjunta con el ejemplo mostrado.

CASO III

$R(x)$ es un polinomio de segundo grado e irreducible (raíces complejas).

$$\frac{Q(x)}{R(x)} = \frac{Q(x)}{x^2 + px + q} = \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} \qquad p,\ q \in \mathbb{R}$$

CASO IV

El denominador $R(x)$ es un polinomio con factores cuadráticos irreducibles con exponente, lo cual significa la presencia de raíces complejas repetidas.

$$\frac{Q(x)}{R(x)} = \frac{Q(x)}{\left(x^2 + px + q\right)^n} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2 x + B_2}{\left(x^2 + px + q\right)^2} + \ldots + \frac{A_n x + B_n}{\left(x^2 + px + q\right)^n}$$

Ejemplos

1) Efectuar $\int \frac{8x^3 + 13x}{\left(x^2+4\right)^2}\,dx$

RESOLUCIÓN:

El integrando se puede expresar en la forma:

$$\frac{8x^3 + 13x}{\left(x^2+4\right)^2} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + 4} + \frac{A_2 x + B_2}{\left(x^2+4\right)^2}$$

cuando se aplica el proceso antes descrito se tiene:

$$\left(x^2+4\right)^2 \left(\frac{8x^3 + 13x}{\left(x^2+4\right)^2} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + 4} + \frac{A_2 x + B_2}{\left(x^2+4\right)^2} \right)$$

$$8x^3 + 13x = \left(A_1 x + B_1\right)\left(x^2 + 4\right) + \left(A_2 x + B_2\right)$$

$$8x^3 + 13x = A_1 x^3 + 4A_1 x + B_1 x^2 + 4B_1 + A_2 x + B_2$$

$$8x^3 + 13x = A_1 x^3 + B_1 x^2 + \left(4A_1 + A_2\right)x + 4B_1 + B_2$$

Por igualdad de polinomios:

$$A_1 = 8$$

$$B_1 = 0$$

$$4A_1 + A_2 = 13 \;\Rightarrow\; A_2 = 13 - 4(8) = 13 - 32 = -19$$

$$4B_1 + B_2 = 0 \;\Rightarrow\; B_2 = 0$$

por lo que la función integrando se puede expresar como la siguiente suma de fracciones parciales:

$$\frac{8x^3 + 13x}{\left(x^2+4\right)^2} = \frac{8x}{\left(x^2+4\right)} - \frac{19x}{\left(x^2+4\right)^2}$$

entonces, la integral original se puede expresar según se indica:

$$\int \frac{8x^3 + 13x}{x^2 + 4}\, dx = \int \frac{8x}{x^2 + 4}\, dx - \int \frac{19x}{\left(x^2 + 4\right)^2}\, dx$$

$$= 8\int \frac{x}{x^2 + 4}\, dx - 19\int x\left(x^2 + 4\right)^{-2} dx$$

$$= 4\ln\left|x^2 + 4\right| + \frac{19}{2\left(x^2 + 4\right)} + c$$

2) Efectuar $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8}\, dx$

RESOLUCIÓN:

En este caso, el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, por lo que primero se efectúa la división de polinomios:

$$\begin{array}{r|l} & 2x \\ \hline x^2 - 2x - 8 & 2x^3 - 4x^2 - 15x + 5 \\ & \underline{-2x^3 + 4x^2 + 16x} \\ & \qquad\qquad\quad x + 5 \end{array}$$

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8}\, dx = \int \left(2x + \frac{x + 5}{x^2 - 2x - 8}\right) dx$$

$$\mathrm{I} = \int 2x\, dx + \underbrace{\int \frac{x + 5}{x^2 - 2x - 8}}_{\mathrm{I}'}\, dx$$

$$\mathrm{I}' = \frac{x + 5}{x^2 - 2x - 8} = \frac{x + 5}{(x - 4)(x + 2)} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x + 2}$$

$$x + 5 = A(x + 2) + B(x - 4)$$

$$x=-2 \qquad 3 = -6B \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$x = 4 \qquad 9 = 6A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{3}{2}$$

$$\mathrm{I} = 2\int x\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-4} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$\mathrm{I} = x^2 + \frac{3}{2}\ \ln|x-4| - \frac{1}{2}\ \ln|x-2| + c$$

3.4 Aplicaciones de la integral definida en el cálculo de: área en coordenadas cartesianas, longitud de arco en coordenadas cartesianas y polares, y volúmenes de sólidos de revolución

CÁLCULO DE ÁREAS

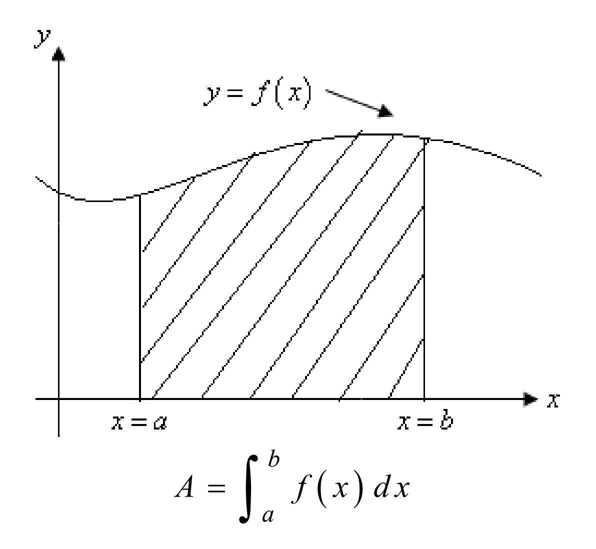
Área de una región en el plano

Según se estableció en el tema 2, la integral definida está dada por:

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x = \int_a^b f(x)\,dx$$

Geométricamente, es la medida del área comprendida entre la curva de ecuación $y = f(x)$, el eje de las abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$, si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,\ b]$ y, si $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a,\ b]$.

En la siguiente figura interpretamos lo anteriormente mencionado.



$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Y si se presenta el caso en que $f(x) < 0$ para toda x en $[a,\ b]$, entonces $f(\xi_i)$ es un número negativo, y la medida del área de la región comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ se define como:

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[-f(\xi_i)\right] \Delta_i x \quad \text{que es igual a:}$$

$$-\int_a^b f(x)\,dx$$

A continuación, ilustramos este último caso con un ejemplo.

Ejemplo

Obtener el área de la región comprendida entre la curva $y = x^2 - 4x + 1$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 3$

RESOLUCIÓN:

Conviene considerar el lugar geométrico de las curvas dadas para definir la región de interés.

De la ecuación de una parábola de vértice $V(h, k)$:

$$(x-h)^2 = 4p(4-k)$$

$$x^2 - 4x = y - 1$$

$$x^2 - 4x + 4 = y + 3 \Rightarrow (x-2)^2 = y + 3$$

$V(2, -3)$

$4p = 1$

$p = \frac{1}{4} > 0$, la parábola se abre hacia arriba

Para obtener algunos puntos de ella:

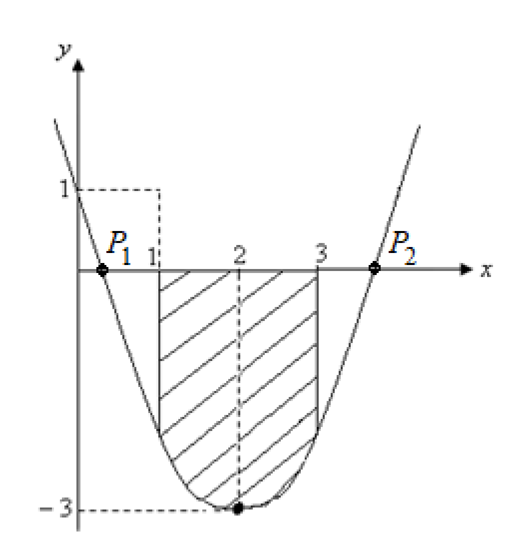
Si $x = 0 \Rightarrow y = 1$

Si $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$

Resolviendo resulta $2+\sqrt{3}$, $x^2 = 2-\sqrt{3}$

Por lo que $P_1\left(2+\sqrt{3}, 0\right)$, $P_2\left(2-\sqrt{3}, 0\right)$

Enseguida se traza la gráfica de la función.



Gráfica de la función

Si en el intervalo $[1,\ 3]$ se considera una partición con celdas de igual amplitud $\Delta_i\, x = |\,\Delta\,|$, y como $f(x) = x^2 - 4x + 1 < 0$ en el mismo intervalo, entonces, cada rectángulo de la interpretación geométrica tiene de base $\Delta_i\, x$ y altura $-f(\xi_i) = -(\xi_i^{\,2} - 4\xi_i + 1) = -\xi_i^{\,2} + 4\xi_i - 1$, luego la suma de las medidas de las áreas de los n rectángulos correspondientes a la partición que se tome es:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(-\xi_i^{\,2} + 4\xi_i - 1 \right) \Delta_i\, x$$

Por lo que la medida del área deseada está dada por:

$$\begin{aligned}
\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(-\xi_i^{\,2} + 4\xi_i - 1 \right) \Delta_i\, x &= \int_1^3 \left(-x^2 + 4x - 1 \right) dx \\
&= -\left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - x \right) \Bigg]_1^3 \\
&= \left(-9 + 18 - 3 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 1 \right) \\
&= 6 - 1 + \frac{1}{3} = 5 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

es decir: $A = \dfrac{16}{3}\, u^2$

En algunos casos, se presenta la situación en que el área determinada por alguna función toma valores positivos, $f(x) \geq 0$ para ciertos valores de la variable independiente, y toma valores negativos $f(x) < 0$ para otros valores de la variable. Este caso se ilustra a continuación.

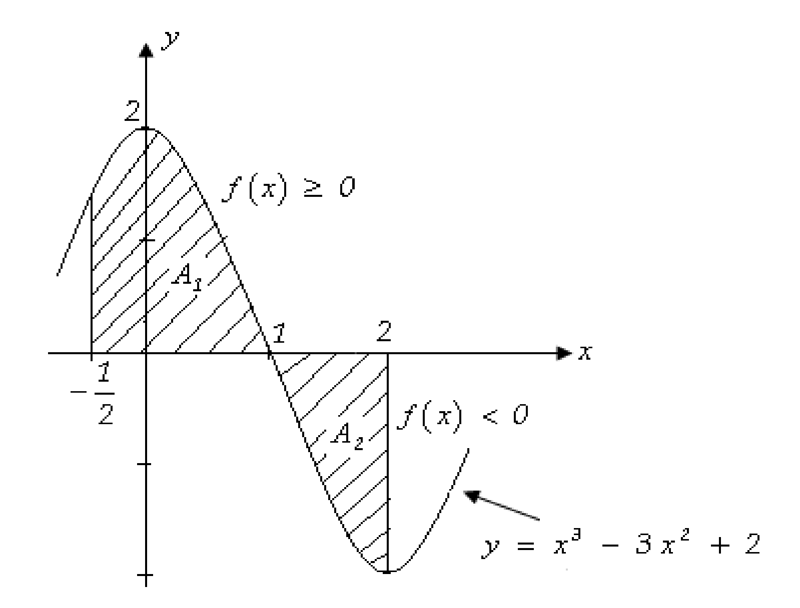
Ejemplo

Encontrar el área de la región comprendida entre la curva de ecuación $y = x^3 - 3x^2 + 2$, el eje x y las rectas $x = -\dfrac{1}{2}$ y $x = 2$.

RESOLUCIÓN:

Inicialmente graficamos, para lo cual identificamos algunos puntos de la región.

$$P_1\left(-\frac{1}{2},\ \frac{9}{8}\right),\ P_2(0,\ 2),\ P_3(1,\ 0),\ P_2(2,\ -2)$$



Según observamos en esta gráfica, la función $f(x) \geq 0$ en el intervalo cerrado $\left[-\frac{1}{2},\ 1\right]$ y $f(x) \leq 0$ en el intervalo $[1,\ 2]$.

Para determinar el área, debemos separar la región en dos partes y, en cada caso, llamaremos a las áreas de estas dos partes A_1 y A_2, calculándolas a continuación:

$$A_{\text{Total}} = A_1 + A_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(x^3 - 3x^2 + 2\right) dx - \int_{1}^{2} \left(x^3 - 3x^2 + 2\right) dx$$

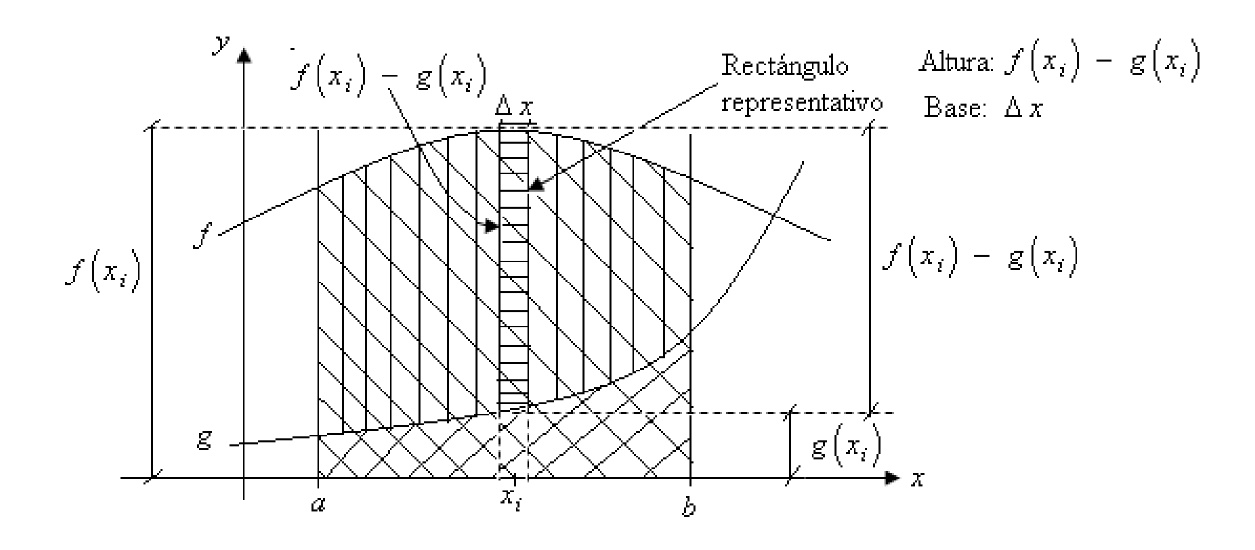
$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x\right]_{1}^{2}$$

$$A_{\text{Total}} = A_1 + A_2 = \left(\frac{135}{64}\right) - \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{135}{64} + \frac{5}{4} = \frac{135 + 80}{64} = \frac{215}{64}$$

$$\therefore \quad A = \frac{215}{64}\,u^2$$

Frecuentemente, se tienen regiones planas de mayor complejidad como las mostradas a continuación. En ellas es necesario calcular el área de una región comprendida entre dos curvas y dos rectas paralelas al eje de las ordenadas.

Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a,\ b]$ tales que $f(x) \geq g(x) \quad \forall\ x \in [a,\ b]$. Queremos obtener el área de la región comprendida entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ según se muestra en la siguiente figura:



Dividimos el intervalo $[a,\ b]$ en n subintervalos, cada uno de ancho Δx, y dibujamos un rectángulo representativo de base Δx y altura $f(x) - g(x)$, donde x está en el i-*ésimo* intervalo, según se muestra en la figura anterior. El área de este rectángulo representativo es:

$$A_i = \left[\, f\left(x_i\right) - g\left(x_i\right) \right] \Delta x$$

al sumar las áreas de los n rectángulos y tomando el límite cuando $|\Delta| \to 0$ $(n \to \infty)$, tenemos:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f\left(x_i \right) - g\left(x_i \right) \right] \Delta x$$

Considerando que f y g son continuas en el intervalo $[a, b]$, $f - g$, también es continua en dicho intervalo y el límite existe. Por tanto, el área A de la región que dada es:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f\left(x_i \right) - g\left(x_i \right) \right] \Delta x = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

$$A = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[f\left(\xi_i \right) - g\left(\xi_i \right) \right] \Delta_i x = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

Cabe mencionar que se emplean rectángulos representativos en diferentes aplicaciones de la integral. Un rectángulo vertical de base Δx implica integración con respecto a x y un rectángulo horizontal de base o ancho Δy implica una integración con respecto a y.

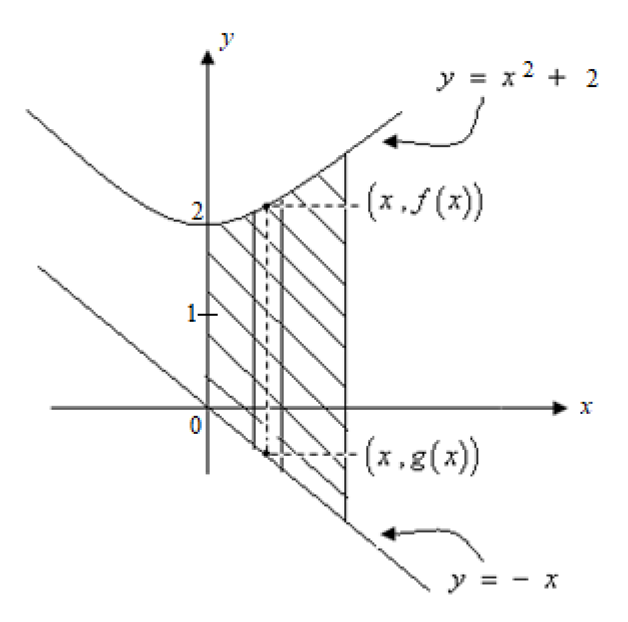
Ejemplos

Área de una región entre dos curvas

1) Hallar el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2 + 2$, $y = -x$, $x = 0$ y $x = 1$.

RESOLUCIÓN:

Inicialmente graficamos:



$$y - 2 = (x - 0)^2$$

$x^2 = y - 2$ parábola

$$x^2 = 4p(y - k)$$

$V(0,\ 2)$ vértice

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^1 \left(x^2 + 2\right) - (-x)\,dx$$

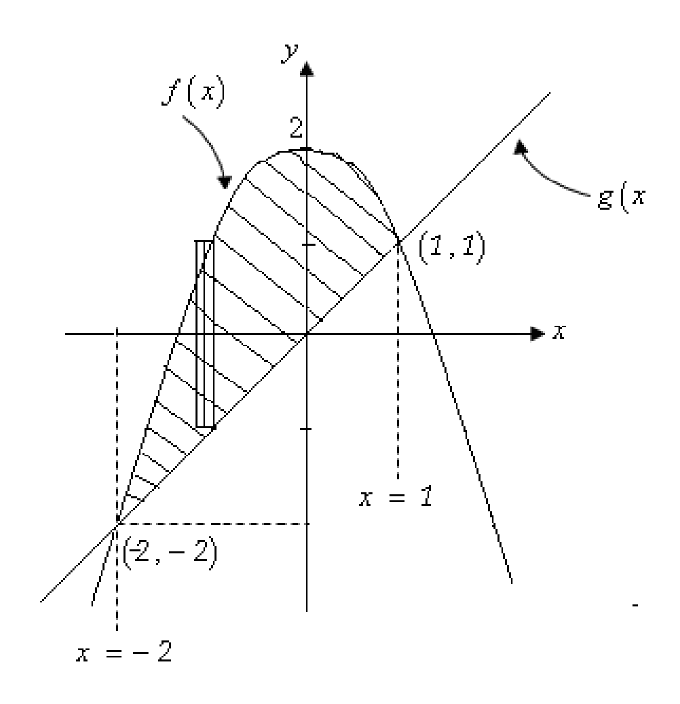
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \Big]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{17}{6}u^2$$

Según podemos observar, en este caso, las curvas no se cortan y los valores de a y b se dan explícitamente. Un problema más común es aquel que se refiere al cálculo del área de una región limitada por dos gráficas que se intersectan y, en este caso, se deben calcular a y b.

2) Hallar el área de la región limitada por las gráficas de $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x$

RESOLUCIÓN:

El lugar geométrico se muestra a continuación:



Ya que no tenemos los valores extremos de la región mostrada, se calculan a partir de los puntos de intersección entre las dos curvas:

$$y = 2 - x^2 , \qquad g = x$$

Igualamos y y g para encontrar los valores que satisfacen a las dos funciones simultáneamente:

$$2 - x^2 = x \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

$$\therefore \quad y_1 = 2 - 1 = 1$$

$$y_2 = 2 - 4 = -2 \quad \Rightarrow \quad P_1 = (1, \ 1), \ P_2 = (-2, \ -2)$$

El área de la región es:

$$A = \int_{-2}^{1} \left[\left(2 - x^2 \right) - x \right] dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \Big]_{-2}^{1}$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4 \right)$$

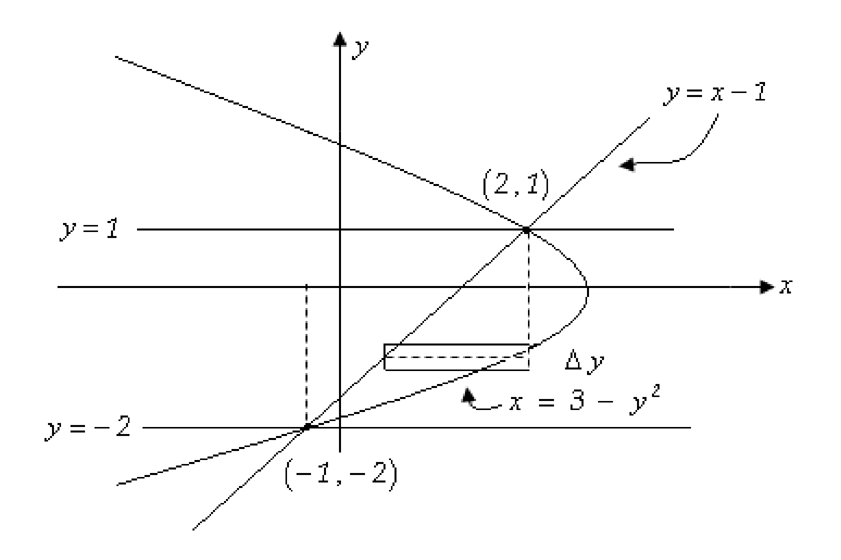
$$= \left(\frac{-2 - 3 + 12}{6} - \frac{8 - 6 - 12}{3} \right)$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

3) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de $x = 3 - y^2$, $y = x - 1$,.

RESOLUCIÓN:

Enseguida se muestra el lugar geométrico que determina la región:



Hallamos puntos de intersección:

$$x = 3 - y^2$$

$$y = x - 1$$

$$3-(x-1)^2 = x$$

$$3-\left(x^2-2x+1\right) = x$$

$$3-x^2+2x-1-x = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$x_1 = -1 \Rightarrow y = -2$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow y = 1$$

En este caso, conviene un rectángulo horizontal.

Al ser horizontal integramos con respecto a y y los extremos serán las rectas de ecuaciones:

$$y = -2$$

$$y = 1$$

$$A = \int_{-2}^{1}\left[\left(3-y^2\right)-(y+1)x\right]dy = \int_{-2}^{1}\left(y^2-y+2\right)dy = -\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}+2y\Big]_{-2}^{1}$$

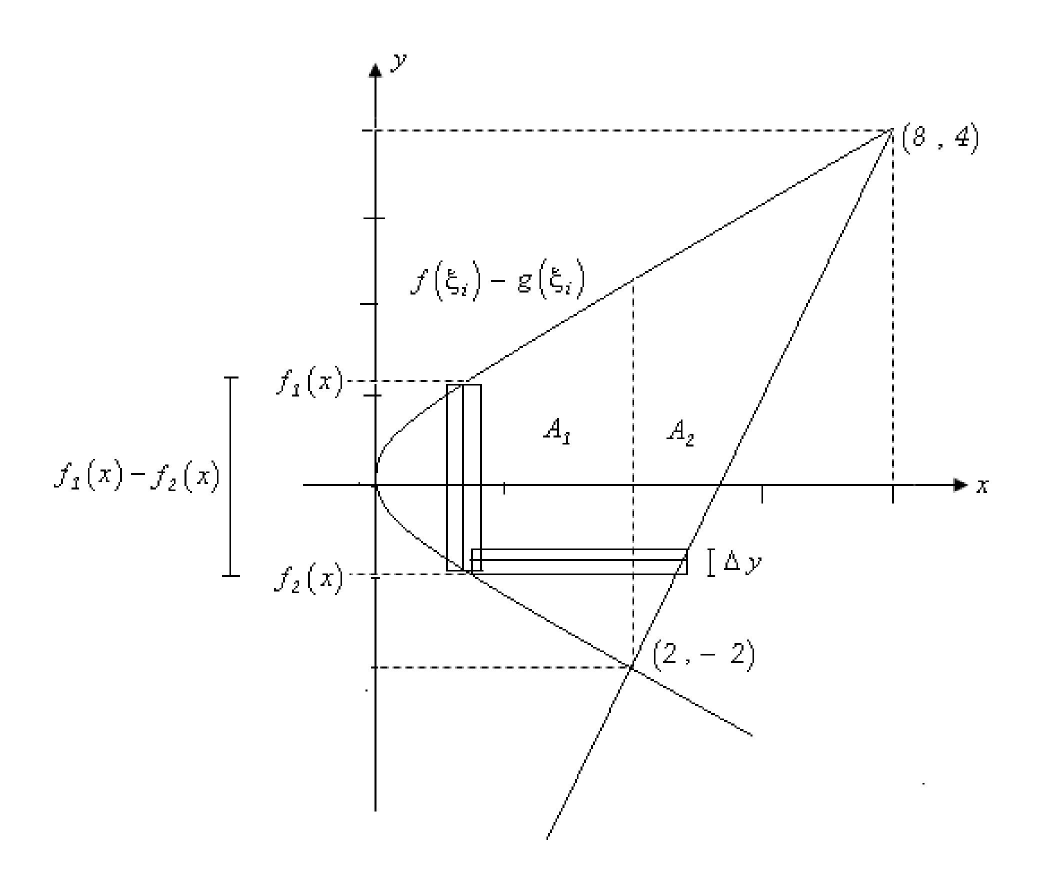
$$= \left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)$$

$$= \frac{9}{2}u^2$$

4) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de $y^2 = 2x$ y la recta $x-y = 4$.

RESOLUCIÓN:

El lugar geométrico es el siguiente:



Al resolverse como simultáneas, se obtienen los puntos de intersección $P_1 = (2, -2)$ y $P_2 = (8, 4)$. Es necesario dividir la región en dos partes: la comprendida en el intervalo de $(0, 2)$ y la que se ubica en el intervalo $(2, 8)$, ya que la curva que limita a la región inferior no es la misma en estos dos intervalos. Se tiene entonces A_1 y A_2.

Para A_1 :

Se observa que $y^2 = 2x$ no es la regla de correspondencia de una función, sino que involucra a dos funciones: $f_1(x) = \sqrt{2x}$ y $f_2(x) = -\sqrt{2x}$ $\left(\text{siendo } f_1(x) > f_2(x)\right)$, así tenemos:

$$A_1 = \int_0^2 \left[f_1(x) - f_2(x) \right] dx = \int_0^2 \left[\sqrt{2x} - \left(-\sqrt{2x} \right) \right] dx$$

$$= 2 \int_0^2 \sqrt{2x}\, dx$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left(2x \right)^{\frac{3}{2}} \Big]_0^2 = \frac{4}{6} \left(2x \right)^{\frac{3}{2}} \Big]_0^2 = \frac{2}{3} \sqrt{\left(2x \right)^3} \Big]_0^2$$

$$= \frac{2}{3} \left(8 \right) = \frac{16}{3}$$

Para A_2 :

$$A_2 = \int_2^8 \left[f_1 \left(x \right) - g \left(x \right) \right] dx = \int_2^8 \left[\sqrt{2x} - \left(x - 4 \right) \right] dx$$

$$= \int_2^8 \left(2x \right)^{\frac{1}{2}} dx - \int_2^8 \left(x - 4 \right) dx$$

$$= \frac{2}{6} \left(2x \right)^{\frac{3}{2}} \Big]_2^8 - \left[\frac{\left(x - 4 \right)^2}{2} \right]_2^8 = \frac{1}{3} \left[64 - 8 \right] - \left[8 - 2 \right] = \frac{56}{3} - 6$$

$$= \frac{56 - 18}{3} = \frac{38}{3}$$

$$A_2 = \frac{38}{3}$$

$$A_T = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{38}{3} = \frac{54}{3} = 18\, u^2$$

Por otro lado, si orientamos horizontalmente los rectángulos, los extremos de integración son $y_1 = -2$, $y_2 = 4$ y la variable de integración será y.

Entonces, debemos tener $g\left(y\right)$ y $f\left(y\right)$:

$$y^2 = 2x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} y^2 = f\left(y\right)$$

$$y = x - 4 \quad \Rightarrow \quad x = y + 4 = g\left(y\right)$$

$$A = \int_{-2}^{4} \left[g(y) - f(y) \right] dy = \int_{-2}^{4} \left[y + 4 - \frac{1}{2} y^2 \right] dy = \frac{y^2}{2} + 4y - \frac{1}{2} \frac{y^3}{3} \Bigg]_{-2}^{4}$$

$$= \left(8 + 16 - \frac{64}{6} \right) - \left(\frac{4}{2} - 8 - \frac{1}{6} (-8) \right)$$

$$= \left(24 - \frac{32}{3} \right) - \left(-6 + \frac{4}{3} \right)$$

$$= 24 + 6 - \frac{32}{3} - \frac{4}{3} = 30 - \frac{36}{3} = 30 - 12 = 18u^2$$

$$\left(\frac{1}{2} y^2 - y - 4 \right) dy = \frac{1}{6} y^3 - \frac{y^2}{2} - 4y \Bigg]_{-2}^{4} = \left(\frac{32}{3} - 8 - 16 \right) - \left(-\frac{8}{6} - 2 + 8 \right)$$

$$= \frac{32}{3} - 24 + \frac{4}{3} - 6 = -30 + 12 = 18u^2$$

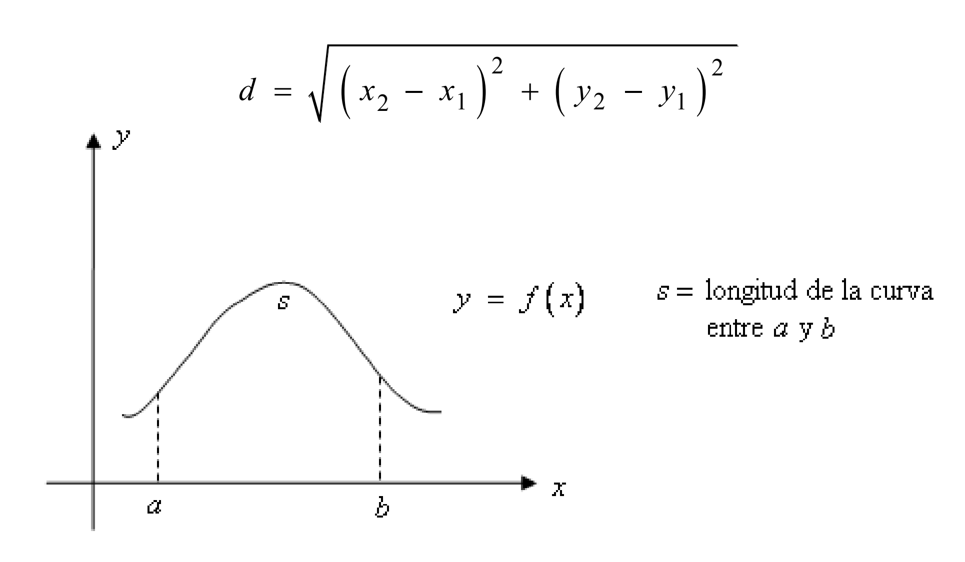
Como se observa, el resultado es el mismo, pero resultó más sencillo empleando rectángulos horizontales.

LONGITUD DE ARCO

Longitud de arco en coordenadas cartesianas

Se quiere determinar la longitud de arco de una curva plana. Podemos aproximar un arco (o trozo de curva) por segmentos rectos, cuyas longitudes se dan por la siguiente fórmula de distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{\left(x_2 - x_1 \right)^2 + \left(y_2 - y_1 \right)^2}$$



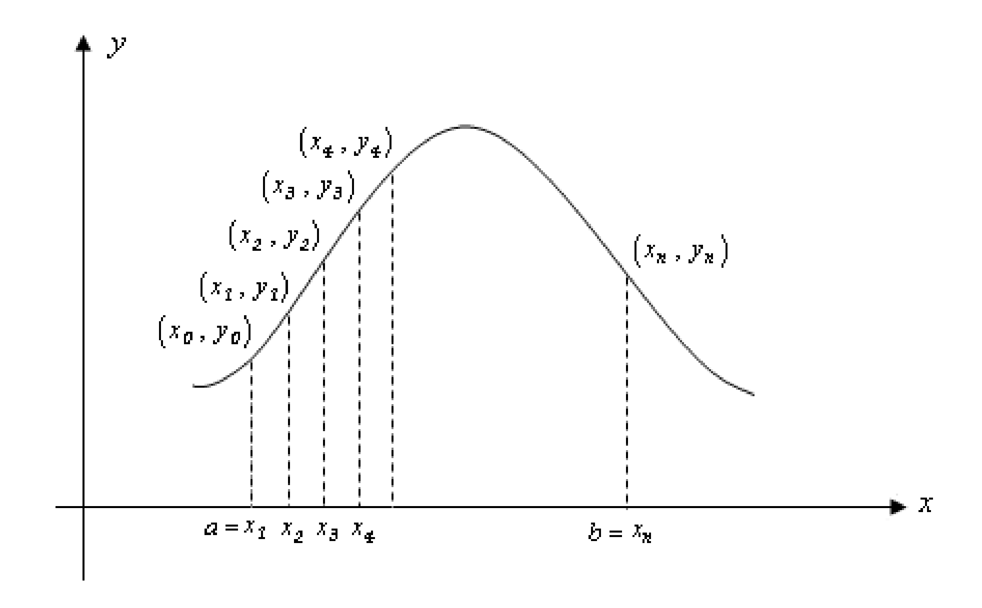
CONTENIDO • INICIO • BIBLIOGRAFÍA

Si un trozo de la curva tiene una *longitud de arco finita*, decimos que es *rectificable.* A continuación, veremos que una condición suficiente para que la gráfica de una función f sea rectificable entre $(a,\ f(a))$ y $(b,\ f(b))$, es que f' sea continua en $[a,\ b]$. Diremos que tales funciones son suaves o derivables con continuidad en $[a,\ b]$.

Supongamos que una función dada por $y = f(x)$ es derivable con continuidad en $[a,\ b]$ y denotamos mediante S la longitud de su gráfica en este intervalo. Entonces, aproximamos la gráfica de f por n segmentos, cuyos extremos están determinados por la partición

$$a < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

como se muestra en la siguiente figura:



al hacer $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, aproximamos la longitud total del arco por:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\Delta x_i\right)^2 + \left(\Delta y_i\right)^2}$$

Tomando el límite cuando $|\Delta| \to 0$, $(n \to \infty)$, obtenemos:

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 \left[1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2 \right]}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2} \; (\Delta x_i)$$

Se debe recordar que para que exista $f'(x) \;\; \forall \; x \in [x_i , x_{i-1}]$, el TVMCI (Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral) garantiza la existencia de al menos un $C_i \in [x_i , \; x_{i-1}]$ tal que:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(C_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(C_i) \quad \Rightarrow \quad \text{Si } C_i = \varepsilon_i$$

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f(\varepsilon_i)$$

Además, puesto que f' es continua en $[a, b]$, sabemos que $\sqrt{1 + f'(x)^2}$, también es continua e integrable en $[a, b]$, entonces tenemos:

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \; (\Delta x_i)$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

Donde S es la longitud de arco de f entre a y b.

DEFINICIÓN

Si la función $y = f(x)$ tiene una derivada continua f' en el intervalo $[a, b]$, entonces, la longitud de arco de f entre a y b está dada por:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\, dx$$

y para una curva suave $x = g(y)$, la longitud de arco de g entre c y d está dada por:

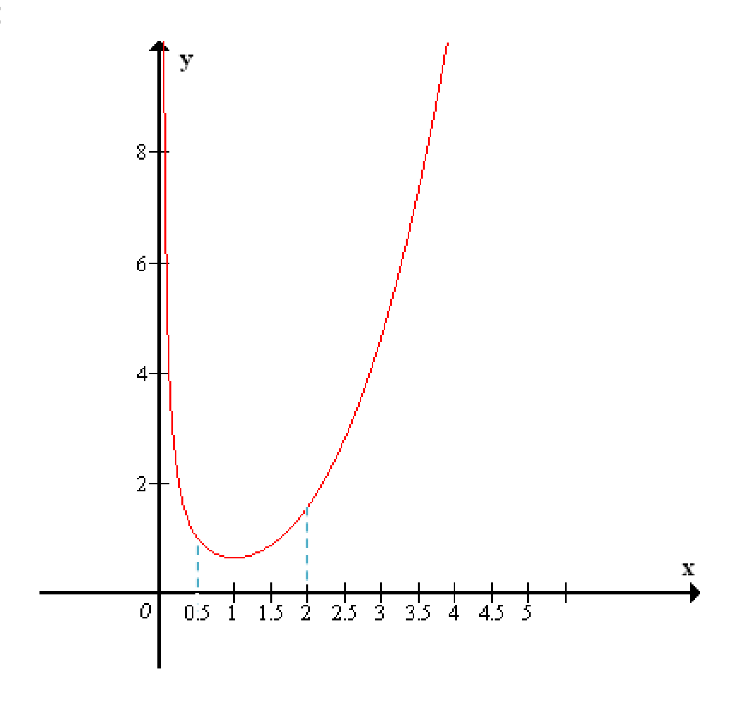
$$S = \int_c^d \sqrt{1 + \left[\frac{dx}{dy}\right]^2}\, dy$$

Ejemplos

1) Calcular la longitud de arco de la gráfica de $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$.

RESOLUCIÓN:

La gráfica de la función es:



$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{4}\left(x^4 - 2\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)\right]}\, dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{1 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}}\, dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4x^4}}\, dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{\frac{1}{4}\left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}\right)}\, dx$$

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{\frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2}\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{24} - 2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{16 - 3}{6} - \frac{1 - 48}{24}\right]$$

$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{13}{6} + \frac{47}{24}\right]$$

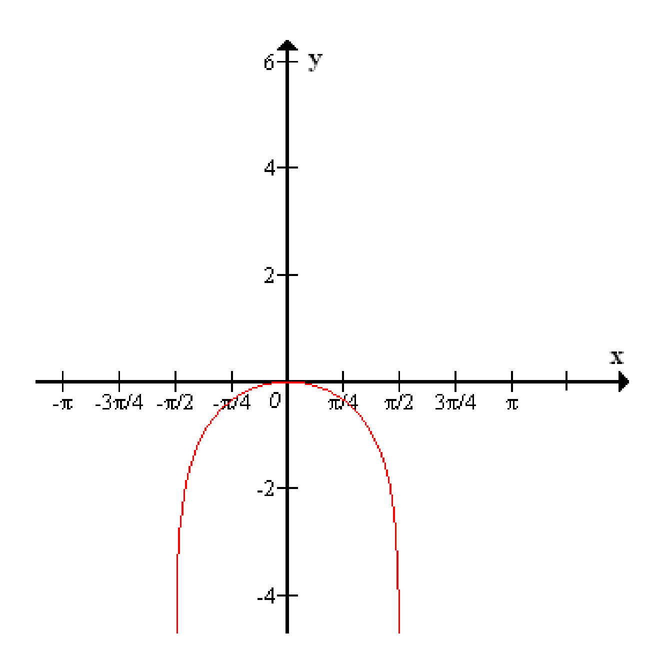
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{99}{24}\right)$$

$$S = \frac{33}{16}\ u$$

2) Calcular la longitud de arco de la gráfica de $y = \ln\left(\cos x\right)$ desde $x = 0$ hasta $x = \frac{\pi}{4}$.

RESOLUCIÓN:

El lugar geométrico se muestra en la siguiente figura:



De acuerdo con la fórmula de longitud de arco, se calcula la derivada de la función:

$$y = \ln\left(\cos x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\tan x$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 x}\; dx$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sec^2 x}\; dx$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x\; dx$$

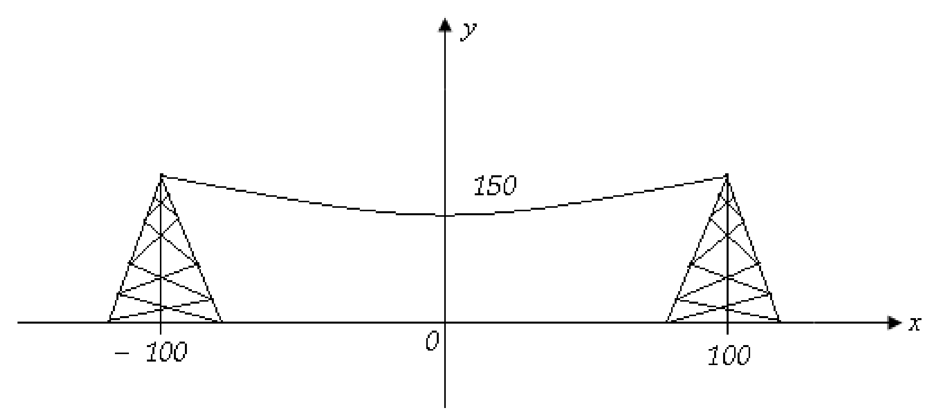
$$S = \left[\ln\left|\sec x + \tan x\right|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left(\sqrt{2} + 1\right) - \ln\left|\sec 0 + \tan 0\right|$$

$$S = \ln\left(\sqrt{2} + 1\right) - \ln\left|1\right| \approx 0.881 \text{ u}$$

3) Un cable eléctrico cuelga entre dos torres que están separadas por 200 pies como se muestra en la siguiente figura. El cable adopta la posición de una catenaria cuya ecuación es:

$$y = 75\left(e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}}\right) = 150 \cosh \frac{x}{150}$$

Calcular la longitud de arco del cable entre las dos torres.



Nota: la figura no está a escala.

RESOLUCIÓN:

La función coseno hiperbólico está dada por:

$$y = \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Para este problema se tiene

$$y = 150 \cosh \frac{x}{150} = 75 \left(e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}} \right)$$

Se sabe que la longitud de arco en coordenadas cartesianas se calcula con la expresión:

$$S = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^{2}}\, dx$$

Según se observa, se necesita la derivada de la función, cuyo proceso de obtención se muestra enseguida.

$$y' = 75 \frac{d}{dx} \left(e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}} \right) = 75 \left(e^{\frac{x}{150}} \bullet \frac{1}{150} - e^{-\frac{x}{150}} \bullet \frac{1}{150} \right)$$

$$y' = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{150}} - e^{-\frac{x}{150}} \right)$$

Para conformar parte del integrando se realiza el desarrollo siguiente:

$$1 + \left(y' \right)^{2} = 1 + \left[\frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{150}} - e^{-\frac{x}{150}} \right) \right]^{2}$$

$$= 1 + \frac{1}{4} \left[\left(e^{\frac{x}{75}} - 2 + e^{-\frac{x}{75}} \right) \right] = 1 + \frac{1}{4} e^{\frac{x}{75}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{75}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{\frac{x}{75}} + \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{75}} = \frac{1}{4} \left[e^{\frac{x}{75}} + 2 + e^{-\frac{x}{75}} \right]$$

Al factorizar el segundo miembro del último renglón de la expresión anterior, se obtiene

$$1 + (y')^2 = \left[\frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}} \right) \right]^2$$

De donde, al sustituir en la expresión de longitud de arco, con los datos del problema:

$$S = \int_{-100}^{100} \sqrt{\left[\frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}} \right) \right]^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_{-100}^{100} \left(e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}} \right) dx$$

$$S = \frac{1}{2} \left(150\, e^{\frac{x}{150}} - 150\, e^{-\frac{x}{150}} \right) \Bigg|_{-100}^{100} = 75 \left[\left(e^{\frac{100}{150}} - e^{-\frac{100}{150}} \right) - \left(e^{\frac{100}{150}} - e^{-\frac{100}{150}} \right) \right]$$

$$S = 75 \left[2e^{\frac{100}{150}} - 2e^{-\frac{100}{150}} \right] = 150\,(1.4343\,...)$$

$$S \approx 215.1475 \ \text{pies}$$

Longitud de arco en coordenadas polares

TEOREMA

Sea f una función cuya derivada es continua en el intervalo $\alpha \leq \theta \leq \beta$. La longitud de la gráfica de $r = f(\theta)$ desde $\theta = \alpha$ a $\theta = \beta$ es:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} \, d\theta$$

DEMOSTRACIÓN:

Considerando la forma paramétrica

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \,, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta \quad \text{donde} \quad r = f(\theta)$$

Al derivar con respecto a θ:

$$\frac{dx}{d\theta} = f(\theta)(-\operatorname{sen}\theta) + \cos\theta\, f'(\theta)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta \qquad \ldots(1)$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 = f'(\theta)^2\cos^2\theta - 2f(\theta)\operatorname{sen}\theta\, f'(\theta)\cos\theta + f(\theta)^2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f(\theta)\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\, f'(\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta \qquad \ldots(2)$$

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = f'(\theta)^2\operatorname{sen}^2\theta + 2f(\theta)\cos\theta\, f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)^2\cos^2\theta$$

Sumando (1) y (2), se tiene:

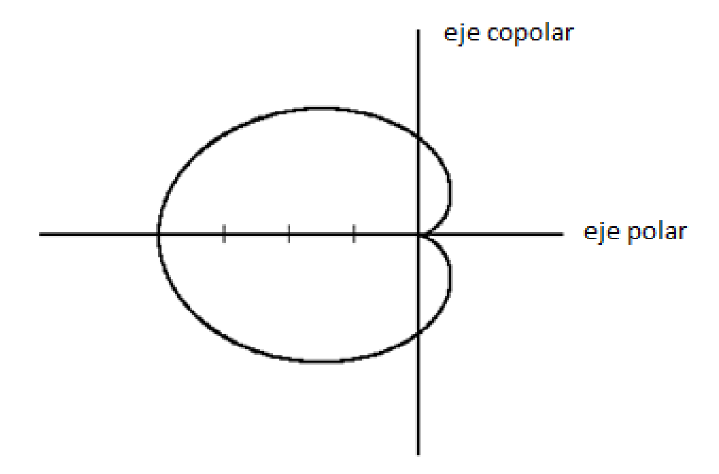
$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left[f'(\theta)\right]^2 + \left[f(\theta)\right]^2$$

Ejemplo

Hallar la longitud de arco desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$ para la cardioide de ecuación:

$$r = f(\theta) = 2 - 2\cos\theta$$

RESOLUCIÓN:



$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left[f(\theta)\right]^2 + \left[f'(\theta)\right]^2}\, d\theta$$

$$S = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{\left[2 - 2\cos\theta\right]^2 + \left[2\operatorname{sen}\theta\right]^2}\, d\theta$$

$$S = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{4 - 8\cos\theta + 4\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$$

$$S = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{4 - 8\cos\theta + 4}\, d\theta = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{8 - 8\cos\theta}\, d\theta = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{8\left(1 - \cos\theta\right)}\, d\theta$$

$$S = 2\sqrt{2} \int_{0}^{2\pi} \sqrt{1 - \cos\theta}\, d\theta = 2\sqrt{2} \int_{0}^{2\pi} \sqrt{1 - \cos\theta} \times \frac{\sqrt{1 + \cos\theta}}{\sqrt{1 + \cos\theta}}\, d\theta$$

$$S = 2\sqrt{2} \int_{0}^{2\pi} \frac{\sqrt{1 - \cos^2\theta}}{\sqrt{1 + \cos\theta}}\, d\theta$$

Considerando la simetría de la curva:

$$S = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,(1+\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta$$

$$S = -8\sqrt{2}\left[\sqrt{1+\cos\theta}\right]_0^{\pi} = -8\sqrt{2}\left[0-\sqrt{2}\right] = 16\text{ u}$$

Por otro lado, consideremos la expresión para la longitud de arco en coordenadas rectangulares:

$$S = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Si en ella $y = f(t)$, $x = f(t)$ resulta:

$$S = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)^2}\,dx$$

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\frac{dx}{dt}}\right)}\,dx = \int_a^b \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{\frac{dx}{dt}}\,dx = \int_a^b \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{\frac{dx}{dt}}\,\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$S = \int_a^b \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{\cancel{\frac{dx}{dt}}}\;\cancel{\frac{dx}{dt}}\,dt$$

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\;dt$$

Esta última expresión permite calcular la longitud de arco en forma paramétrica.

Volúmenes de sólidos de revolución

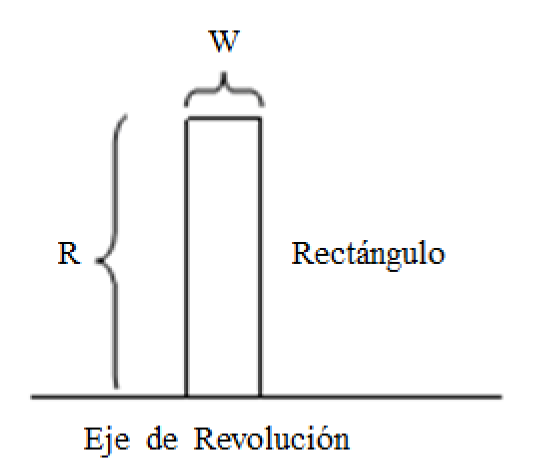
Hasta ahora, nos hemos referido a las aplicaciones de la integral definida para el cálculo de áreas y longitudes de arco, tanto en coordenadas cartesianas como en coordenadas polares.

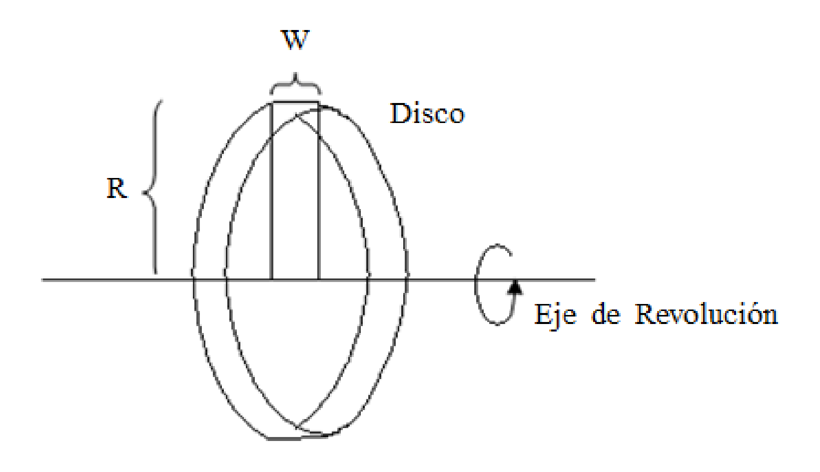
Enseguida, corresponde referirnos a otra aplicación importante, la cual consiste en el cálculo del volumen de un sólido tridimensional. Este tipo de sólidos aparece frecuentemente en ingeniería y en procesos de producción. Ejemplos de sólidos de revolución son: los ejes, embudos, pilares, botellas y émbolos.

Método de discos

Si giramos una región del plano alrededor de una línea, el sólido resultante es conocido como sólido de revolución.

El más simple de los sólidos de revolución es el cilindro circular recto o disco; este se forma al girar un rectángulo alrededor de un eje adyacente a uno de los lados del rectángulo, como se muestra en la siguiente figura:





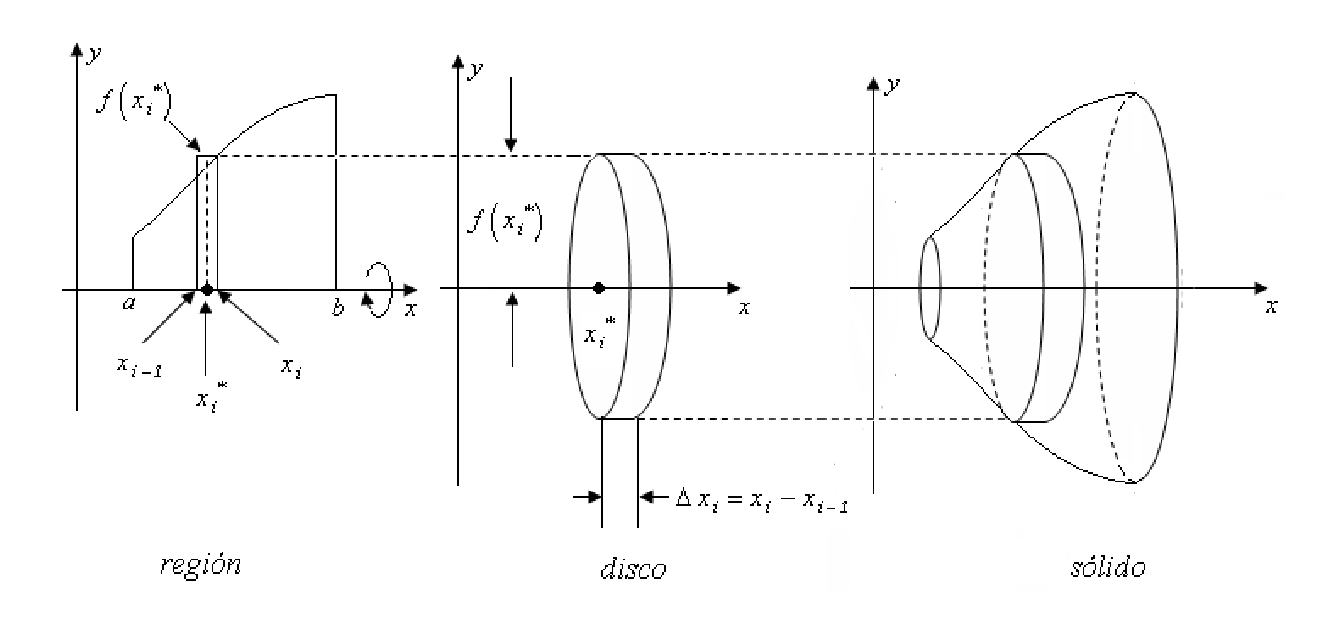
El volumen de este disco es:

$$\text{Volumen de disco} = \pi R^2 W$$

$R =$ radio del disco

$W =$ altura del disco

Para ver cómo usar el volumen del disco en el cálculo del volumen de un sólido de revolución general, consideremos el siguiente sólido de revolución:



Este sólido se obtiene al girar la región plana mostrada alrededor del eje indicado.

Para calcular el volumen de este sólido, consideremos un rectángulo representativo en la región plana. Cuando se gira este rectángulo, alrededor del eje de revolución, genera un disco representativo cuyo volumen es:

$$V = \pi R^2 \Delta x$$

Si aproximamos el volumen del sólido por n discos de ancho Δx y de radio $R\left(x_i\right)$, tenemos:

$$\text{Volumen del sólido} \qquad V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi \left[R\left(x_i\right) \right]^2 \Delta x$$

$$\approx \pi \sum_{i=1}^{n} \left[R\left(x_i\right) \right]^2 \Delta x$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty \left(\left| \Delta \right| \to 0 \right)$:

$$\text{Volumen del sólido} := \lim_{n \to \infty} \pi \sum_{i=1}^{n} \left[R\left(x_i\right) \right]^2 \Delta x$$

$$= \pi \int_a^b \left[R\left(x_i\right) \right]^2 dx$$

Si tomamos el eje de revolución verticalmente, se obtiene una expresión similar cambiando solo la variable de integración y los extremos.

Así, podemos resumir el *método de discos*.

Método de discos: Para calcular el volumen de un sólido de revolución por el método de discos, se deben usar las fórmulas siguientes:

Eje horizontal de revolución:

$$\text{Volumen} = V = \pi \int_a^b \left[R\left(x_i \right) \right]^2 dx$$

Eje vertical de revolución:

$$\text{Volumen} = V = \pi \int_c^d \left[R\left(y_i \right) \right]^2 dy$$

Ejemplos

1) Calcular el volumen del sólido formado al girar la región limitada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ y el eje x, $0 \leq x \leq \pi$, alrededor del eje x.

RESOLUCIÓN:

$$V = \pi \int_0^b \left[R\left(x_i \right) \right]^2 dx$$

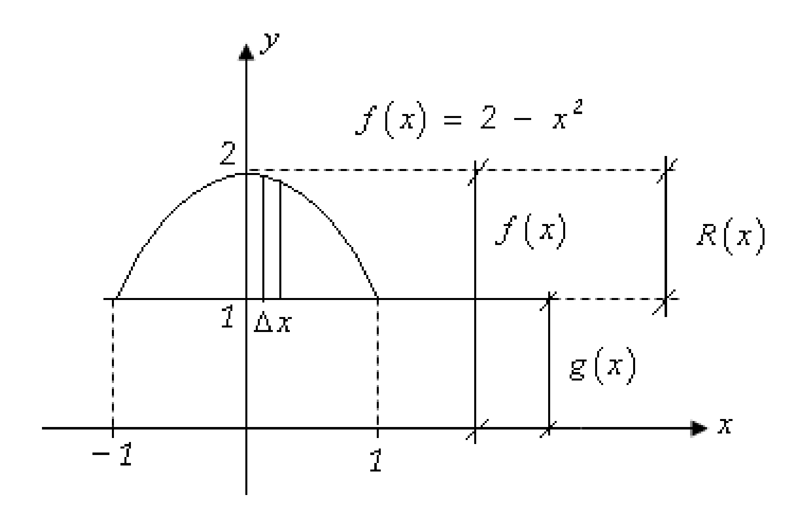
$$f(x) = R(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$$

$$V = \pi \int_0^\pi \left(\sqrt{\operatorname{sen} x} \right)^2 dx = \pi \int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx = -\pi \cos \pi \Big]_0^\pi$$

$$= -\pi \left[-1 \quad -1 \right] = 2\pi \quad \text{unidades de volumen}$$

2) Calcular el volumen del sólido formado al girar la región limitada por $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = 1$ alrededor de la línea $y = 1$.

RESOLUCIÓN:



Ya que la región está limitada por dos curvas (recta y parábola), hallamos los puntos de intersección que darán los extremos de integración.

$$2 - x^2 = 1$$

$$x^2 - 2 + 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

El radio del sólido está dado por la diferencia de $f(x) - g(x)$ según se observa en la figura anterior:

$$R(x) = f(x) - g(x) = 2 - x^2 - 1$$

$$= 1 - x^2$$

$$V = \pi \int_a^b \left[R\left(x_i\right)\right]^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - 2x^2 + x^4\right) dx$$

$$V = \pi \left(x - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 \right)_{-1}^{1} = \pi \left[\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)\right] = \pi \left(2 + \frac{2}{5} - \frac{4}{3}\right)$$

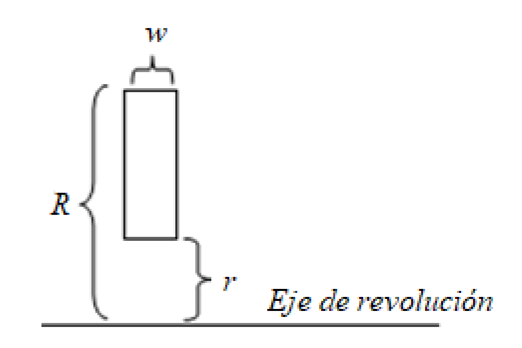
$$V = \pi \left(\frac{30 + 6 - 20}{15} \right) = \pi \left(\frac{36 - 20}{15} \right) = \pi \left(\frac{16}{15} \right)$$

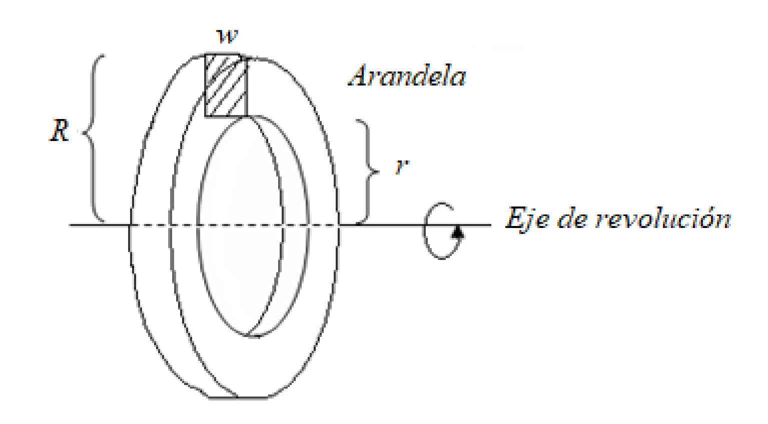
$$V = \frac{16}{15} \pi \approx 3.35 \quad \text{unidades de volumen}$$

Método de arandelas

El método de arandelas es un método que se deduce del método de discos, pues ahora se consideran sólidos de revolución con un agujero (hueco). En este caso, se reemplaza el disco representativo por una arandela representativa.

La arandela se obtiene girando un rectángulo alrededor de un eje, como se muestra a continuación:

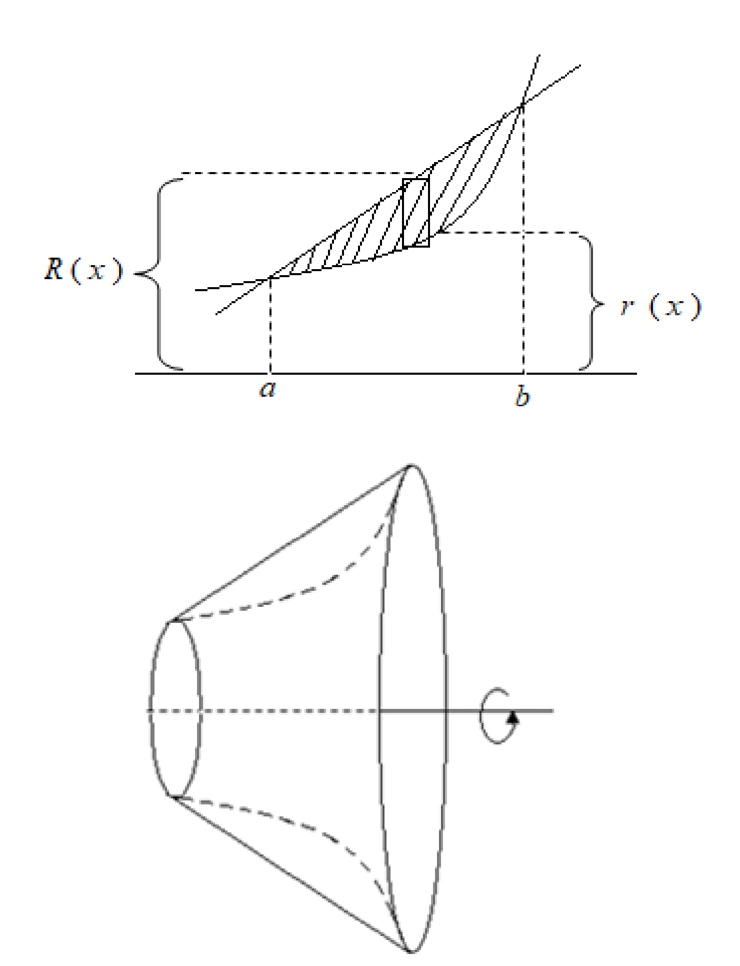




Si r es el radio interno de la arandela, R el radio exterior y w es la anchura (altura) de la arandela, entonces, el volumen está dado por:

Volumen de la arandela $V = \pi\left(R^2 - r^2\right)w$

Ahora, consideremos una región que está limitada por un radio externo $R(x)$ y otro interno $r(x)$ como se ve a continuación:



Sólido de revolución con agujero

Si se gira esta región alrededor de su eje de revolución, el volumen del sólido está dado por:

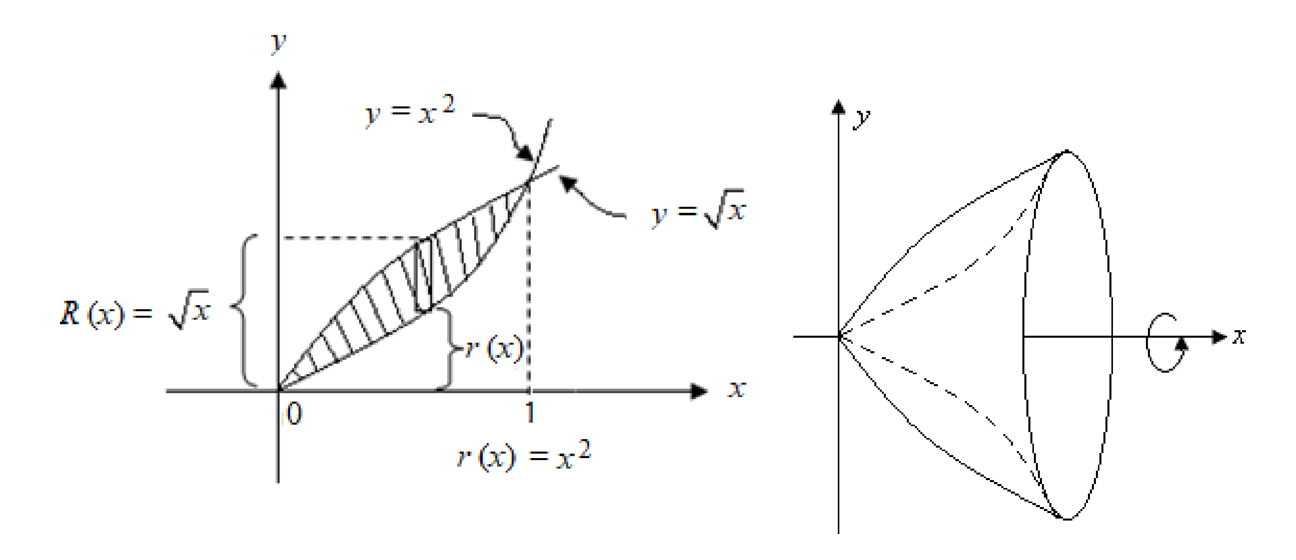
$$V = \pi\int_a^b \left[R(x)\right]^2 dx - \pi\int_a^b \left[r(x)\right]^2 dx = \pi\int_a^b \left(\left[R(x)\right]^2 - \left[r(x)\right]^2\right) dx$$

Nótese que la integral está determinada por la diferencia del radio externo $R(x)$, menos $r(x)$ que es el radio interno.

Conviene aclarar que la integral en que aparece el radio interior representa el volumen del agujero (hueco) y este se resta de la integral en que aparece el radio exterior.

Ejemplo

Hallar el volumen del sólido formado al girar la región limitada por la gráfica de $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$, alrededor del eje x como se muestra a continuación:



RESOLUCIÓN:

$R(x) = \sqrt{x}$ radio exterior

$r(x) = x^2$ radio interior

$$V = \pi \int_a^b \left([R(x)]^2 - [r(x)]^2 \right) dx = \pi \int_0^1 \left(x - x^4 \right) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$V = \frac{3}{10} \pi$ unidades de volumen

TEMA 4

DERIVACIÓN Y DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES ESCALARES DE VARIAS VARIABLES

4.1 Definición de funciones escalares de variable vectorial. Concepto de dominio y recorrido, y su representación gráfica. Concepto de región

En los temas anteriores, nos hemos referido al proceso de integración de las funciones de una variable independiente, así como a la derivación de funciones logarítmicas, exponenciales y algunas otras. Al presente tema le corresponde la introducción a funciones de varias variables, donde nuestro estudio se verá facilitado al tomar como referencias algunos de los conceptos fundamentales, ya estudiados en las funciones de una variable.

El objetivo central de este tema será conocer cómo varían este tipo de funciones, así como algunas de sus aplicaciones.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En la vida diaria, un sin número de fenómenos y problemas comunes están planteados en términos de funciones de dos o más variables. Por ejemplo, el área de un rectángulo, $A = \frac{(\text{base})(\text{altura})}{2}$, resulta en una función de dos variables; de manera similar, el trabajo efectuado por una fuerza $W = x\ y\ z$, resulta en una función de tres variables. Para representar este tipo de funciones, se emplea una notación análoga a la de las funciones de una variable.

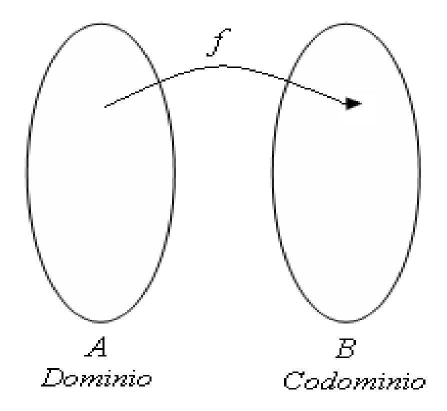
Conviene iniciar nuestro estudio recordando, para el caso de una variable independiente, los conceptos básicos que definen a una función.

Definición de función (función de una variable)

Una función f es una regla o criterio que asocia a cada elemento de un conjunto A, uno y solo un elemento de otro conjunto B.

Simbólicamente, se escribe $f: A \to B$

Al conjunto A se le llama *Dominio de la función* y al conjunto B *Codominio de la función*.



Los elementos de los conjuntos A y B pueden ser de cualquier naturaleza.

En el Cálculo Diferencial e Integral básico, los conjuntos A y B son el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ (o subconjuntos de este) y, en este caso, las funciones reciben el nombre de funciones reales de variable real (o función escalar). En este tema, se tratará, principalmente, con funciones $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, es decir, con funciones reales de dos variables independientes. Estas funciones son llamadas, también, *funciones reales de variable vectorial* y son un caso particular cuando $n = 2$, del caso general del tipo de funciones $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Algunos casos adicionales de estas funciones son:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función real de variable vectorial

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ función real de variable vectorial

o también $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ función real de variable vectorial

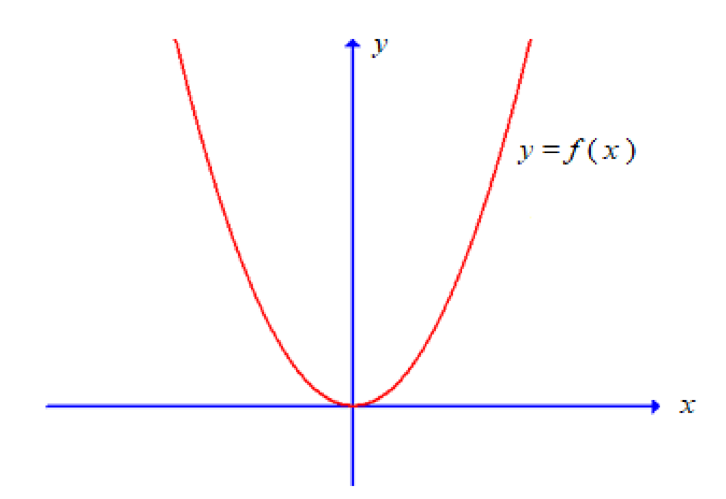
cuando $n = 3$, se tiene una función real de tres variables independientes.

Geométricamente, tenemos la representación de funciones de uno y dos variables independientes bajo las siguientes consideraciones.

La gráfica de una función real de varias variables independientes $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un subconjunto de puntos del espacio $\mathbb{R}^{n+1}$. Así, para $n = 1$ se tiene que la gráfica de una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un subconjunto de puntos del espacio bidimensional de $\mathbb{R}^2$, en este caso, el conjunto de puntos conforman una curva.

Ejemplos

1) $y = f(x) = 3x^2$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Para $n = 2$, la gráfica de una función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un subconjunto de puntos del espacio $\mathbb{R}^3$; en este caso, el conjunto de puntos conforma una superficie y se representa como:

$$z = f(x, y), \text{ o bien, } F(x, y, z) = 0$$

2)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2$$

$$z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$z = f(x, y)$$

Para $n = 3$, es decir, para las funciones $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ no es posible dibujar sus gráficas; en este caso, para tener una idea intuitiva sobre la gráfica de estas funciones, se recurre al concepto de superficies de nivel.

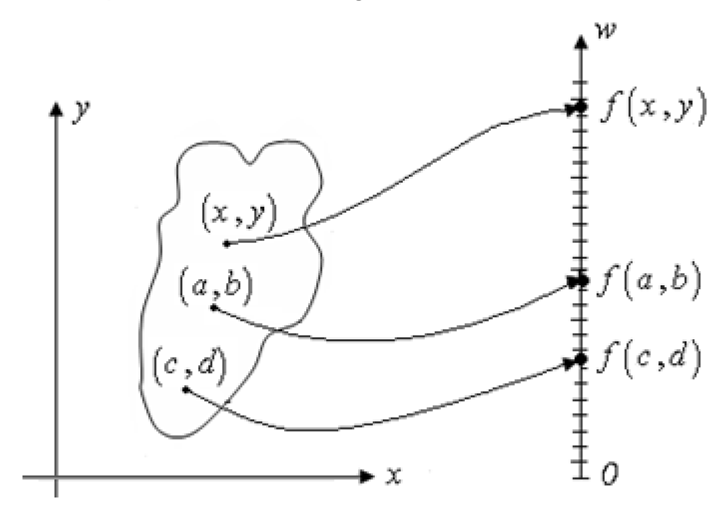
Para las funciones de dos variables, consideramos la siguiente definición.

Definición de función (función de dos variables)

Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales. Una función f de dos variables es una correspondencia que asocia a cada par (x, y) en D, un único número real que se denota por $f(x, y)$.

El conjunto D es el dominio de f. El contradominio de f consta de todos los números reales $f(x, y)$ para (x, y) en D.

La anterior definición, la podemos ilustrar geométricamente a continuación:



En la definición anterior, el dominio D se puede representar *por puntos en un plano* xy y el *contradominio por puntos en una recta real*; por ejemplo, un eje w como se ilustra en la figura anterior. Hay flechas que van de los pares ordenados en D a los números correspondientes en el contradominio. Como aplicación, consideremos una lámina delgada de metal que tiene la forma en D. A cada punto (x, y) de la lámina le corresponde una temperatura $f(x, y)$ que puede medirse con un termómetro y se representa en el eje w.

Es común utilizar una expresión en x y y para especificar $f(x, y)$, y se supone que el dominio es el conjunto de todos los pares (x, y) para los que la expresión tiene sentido. Entonces, se dice que f es una función de x y y. Ilustramos los conceptos anteriores con los siguientes ejemplos.

Ejemplos

1) Sean los conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

Para la función $f:=A^2 \to B$ definida por $f(a_1, a_2) = 3a_1 + a_2$, $\forall\ a_1, a_2 \in A$, obtener el dominio y el recorrido de dicha función.

RESOLUCIÓN:

El conjunto A^2 es el conjunto o producto cartesiano de A consigo mismo, es decir, $A^2 = A \times A$, por lo tanto:

$$A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

El dominio de la función D_f es, precisamente, A^2; es decir, $D_f = A^2$.

De acuerdo con la regla de definición de la función, se tiene que la imagen del primer elemento del dominio es:

$$f(1, 1) = 4$$

Para los demás elementos de D_f se tiene:

$$f(1,2) = 5, \quad f(1, 3) = 6, \quad f(2, 1) = 7, \text{ etc.}$$

Luego entonces, el recorrido de la función R_f es:

$$R_f = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

2) Para la función f definida por $f(x, y) = \sqrt{25x^2 + 16y^2 - 400}$, obtener su dominio y su recorrido.

RESOLUCIÓN:

No olvidemos que el dominio está dado por los valores de (x, y) tales que, bajo la función f , su imagen es un elemento real.

Entonces, los elementos (x, y) del dominio deben satisfacer la condición:

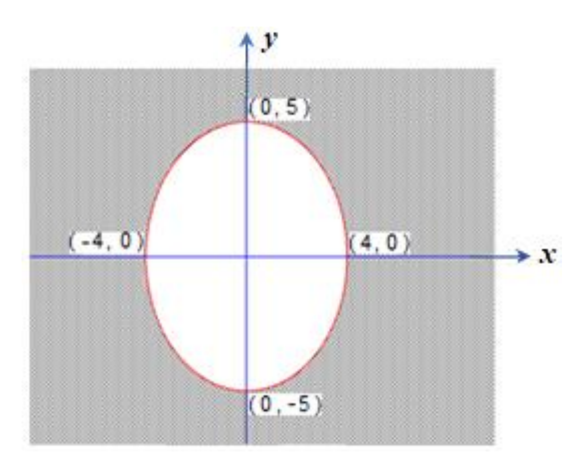
$$25x^2 + 16y^2 - 400 \geq 0$$

y, por lo tanto, el dominio de la función es el conjunto:

$$D_f = \left\{ (x, y) / 25x^2 + 16y^2 \geq 400, \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Antes de obtener el recorrido, conviene mencionar lo siguiente.

En algunos problemas es conveniente mostrar, gráficamente, en un plano cartesiano, el conjunto de puntos que pertenecen al dominio. A este conjunto de puntos le llamaremos *región de definición de la función* (más adelante se formalizará este concepto). En este ejemplo, el dominio estará representado por los puntos de la elipse $25x^2 + 16y^2 = 400$ y por todos los puntos del plano xy exteriores a ella.



El recorrido se forma con los elementos del codominio que son imagen de los elementos del dominio.

Si $f(x,\ y) = z$, la expresión $z = f(x,\ y) = \sqrt{25x^2 + 16y^2 - 400}$ muestra que solo los valores positivos del codominio y el cero son imagen de los elementos del dominio. Así, el recorrido es el conjunto:

$$R_f = \{ z / 0 \le z < \infty,\ \ z \in \mathbb{R} \}$$

3)

a) Obtener el dominio de la función $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(u,\ v) = -\sqrt{v^2 - 4u + 8}$$

b) Mostrar la región de definición de la función

c) Obtener el recorrido de la función

RESOLUCIÓN:

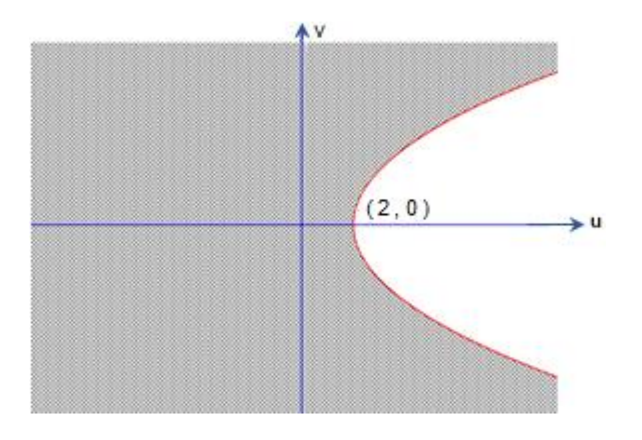
a) Los elementos $(u,\ v)$ deben satisfacer la condición:

$$v^2 - 4u + 8 \ge 0$$

Luego, el dominio de la función es el conjunto:

$$D_f = \{ (u,\ v) / v^2 - 4u + 8 \ge 0,\ \ u, v \in \mathbb{R} \}$$

b) Gráficamente, el conjunto de puntos del dominio representados en un plano cartesiano corresponde a los puntos $v^2 - 4u + 8 = 0$ y a todos los que están del lado izquierdo de la parábola.



c) Si $w = f(u, v)$, entonces, el recorrido de la función se puede expresar mediante el conjunto:

$$R_f = \{ w / -\infty < w \leq 0, \quad w \in \mathbb{R} \}$$

4) Determinar el dominio y el recorrido de la siguiente función. Dibujar la región del dominio.

$$z = \sqrt{64 - 4x^2 - y^2}$$

RESOLUCIÓN:

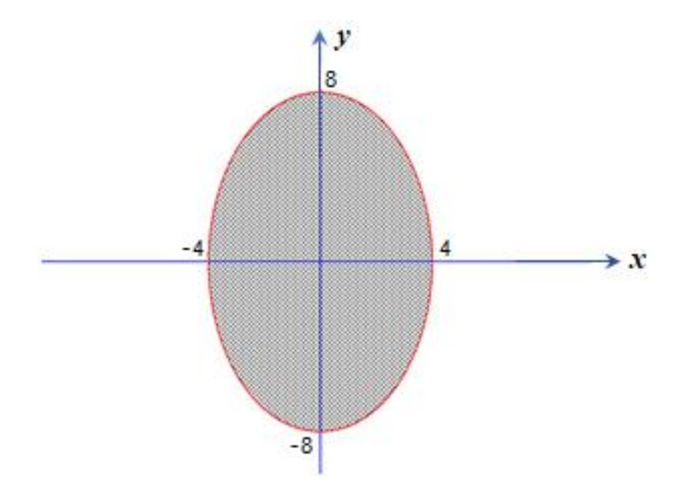
Como en los ejemplos previos, el dominio satisface la desigualdad indicada a continuación:

$$D_f = \left\{ x, y / \ 4x^2 + y^2 \leq 64, \quad x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Para obtener el recorrido, se puede establecer a partir del análisis del dominio, obteniendo:

$$R_f = \{ z / \ 0 \leq z \leq 8 \}$$

Finalmente, para dibujar la región del dominio de la función, se analiza la expresión que define el dominio, considerando primero la curva en la frontera, y después al interior.



4.2 Representación gráfica para el caso de funciones de dos variables independientes. Curvas de nivel

GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. CURVAS DE NIVEL

La gráfica de una función de dos variables independientes, es decir, de una función $z = f(x\ ,\ y)$ es, *generalmente*, *una superficie.*

En forma general, decimos que una *superficie es el lugar geométrico correspondiente a una ecuación de la forma* $F(x, y, z) = 0$, esta ecuación puede representar en *forma implícita*, *una función* entre las *variables* x, y, z, o bien, *simplemente* una *relación entre dichas variables* sin que, *necesariamente*, *dicha relación sea una función*.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ es de la forma $F(x, y, z) = 0$, sin embargo, aunque representa una superficie, no es una función ni explícita ni implícitamente.
La expresión $z = f(x, y)$ es un caso especial de $F(x, y, z) = 0$, si se define $F(x, y, z) = z - f(x, y)$.

Algunos ejemplos de superficies son: el plano, la esfera, el cilindro, el elipsoide, el cono, el hiperboloide; el plano tiene por ecuación $Ax + By + Cz + D$, la cual es una ecuación de primer grado y los otros ejemplos son ecuaciones de segundo grado en, al menos, una de las variables x, y o z.

Ejemplo

Las siguientes expresiones son casos típicos de superficies:

$$4x^2 + y^2 - 12z = 0 \quad \text{y} \quad z - 2 = 0$$

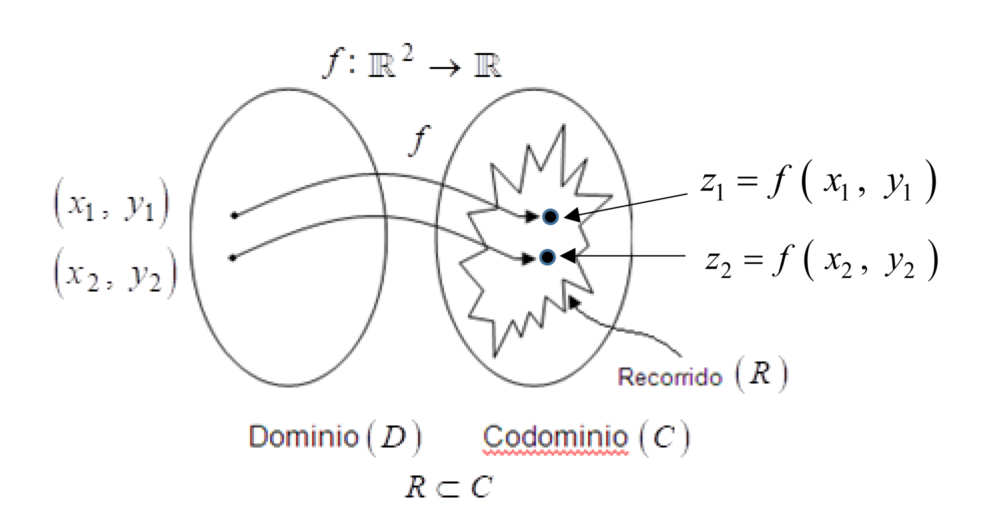
A continuación, se presenta la definición de las funciones de interés en este tema con mayor formalidad que la anteriormente presentada.

Definición de función (función de dos variables)

Sea D un conjunto de pares de números reales. Si a cada par ordenado (x, y) del conjunto D le corresponde un número real $f(x, y)$, entonces, se dice que f es función de x y y. El conjunto D es el dominio de f y el conjunto de valores de $f(x, y)$ es el recorrido de f.

Para la función $z = f(x, y)$, x y z son variables independientes, z es la variable dependiente.

En diagramas de Venn se tiene la siguiente representación:



Ejemplo

1) $f(x, y) = x^2 + y^2$

$z = x^2 + y^2$

Cilindro circular recto

2) $z = \sqrt{-x^2 - y^2 + 4}$

$z^2 = -x^2 - y^2 + 4$

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Esfera con radio 2

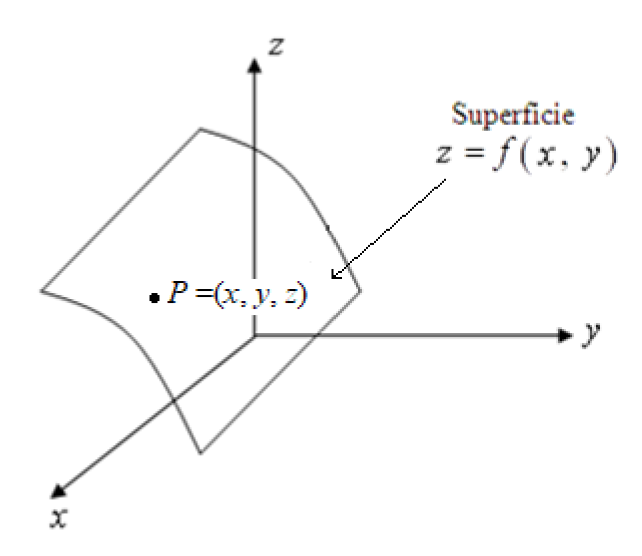
3) $3x + 4y - z = 0$

$z = 3x + 4y$

$c : \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Planos y curva en el espacio

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS FUNCIONES $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



Ejemplos

Determinar el dominio de las siguientes funciones:

1) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x}$

$$D_f = \left\{ (x, y) / x^2 + y^2 \geq 9, \quad x \neq 0 \right\}$$

2) $g(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$

$$D_g = \left\{ (x, y, z) / 9 - x^2 - y^2 - z^2 > 0 \right\}$$

$$D_g = \left\{ (x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 < 9 \right\}$$

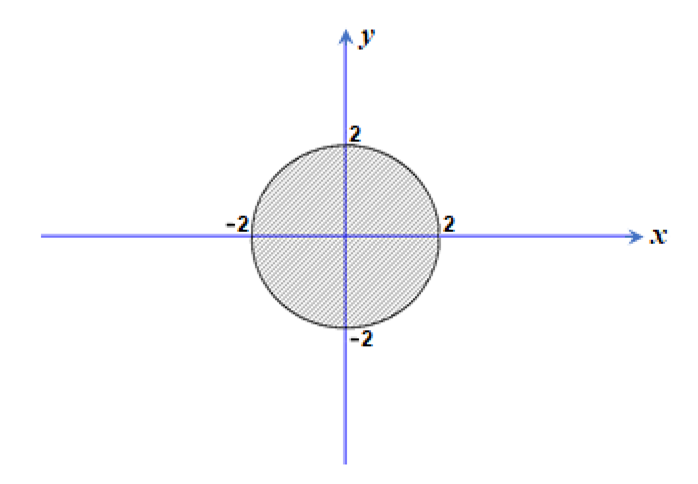
A continuación, se establece otra definición de interés:

> **Definición**
> Se llama región de definición de una función de dos variables independientes, a la representación en el plano xy del dominio de la función $z = f(x, y)$

Ejemplos

Determinar la región de definición de la función:

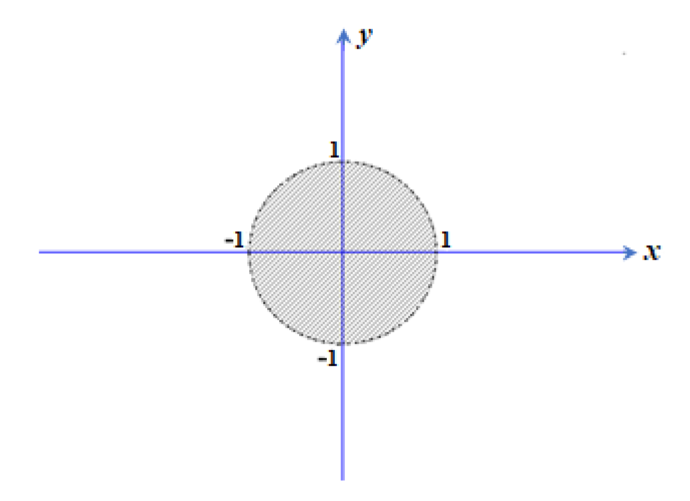
1) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$



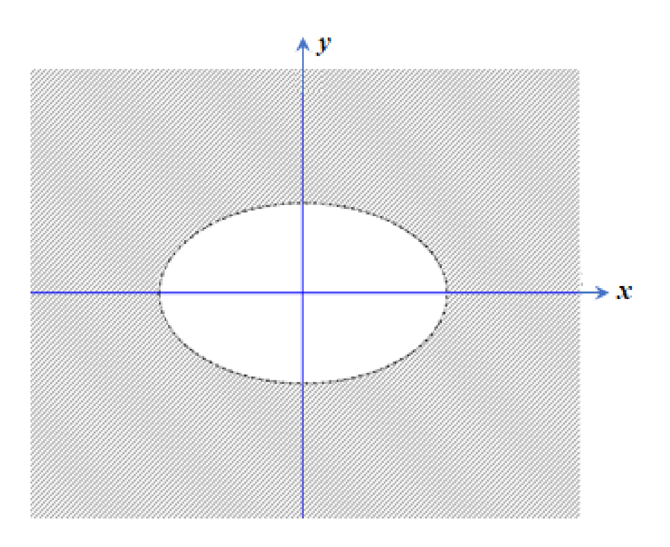
$$D_f = \left\{ (x, y) \middle| x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$$

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

2) Si el dominio estuviera dado por $x^2 + y^2 < 1$, se tendría la gráfica siguiente:



3) Para el caso en que el dominio de alguna función $z = f(x, y)$ estuviera dado por $D_f = x, y \,/\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} > 1$, se tendría el siguiente lugar geométrico:



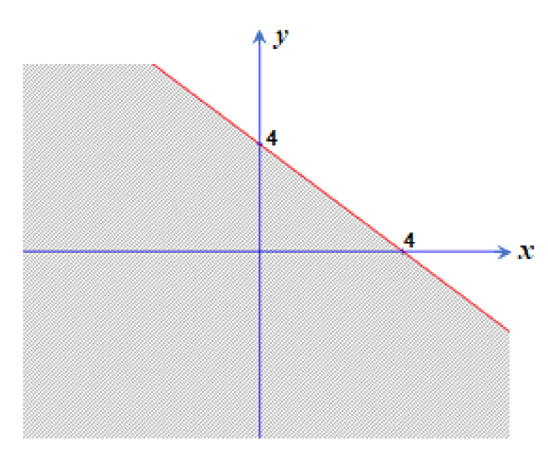
Ejemplos

Describir la región $\Re$ que corresponde en el plano $x\,y$, al dominio de las funciones siguientes y hallar el recorrido de ellas.

1) $f(x, y) = \ln(4 - x - y)$

RESOLUCIÓN:

$$D_f = \{(x, y)/(4 - x - y) > 0\} \quad R_f = \{z / z \in \Re\} = \Re$$

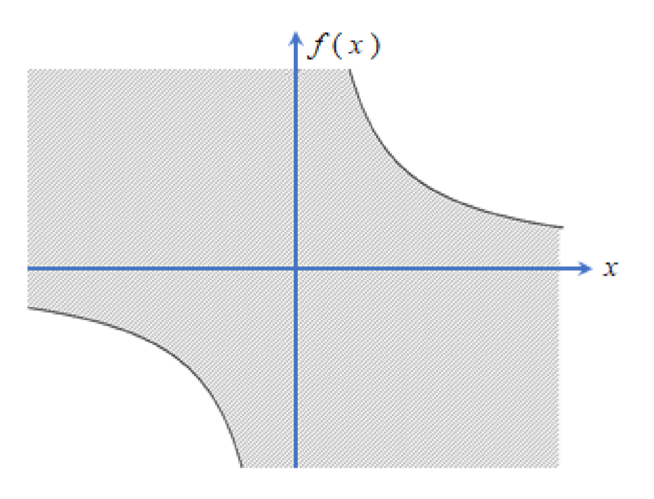


Gráfica del dominio
(Región de definición de la función)

2) $f(x, y) = \ln(4 - xy)$

RESOLUCIÓN:

$$D_f = \{(x, y) / 4 - xy > 0\} \quad R_f = \{z / z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$



Gráfica del dominio
(Región de definición de la función)

3) $z = \dfrac{x + y}{x\,y}$

RESOLUCIÓN:

$$D_f = \{(x, y) / x \neq 0, \; y \neq 0\} \quad R_f = \mathbb{R}$$

f (x)

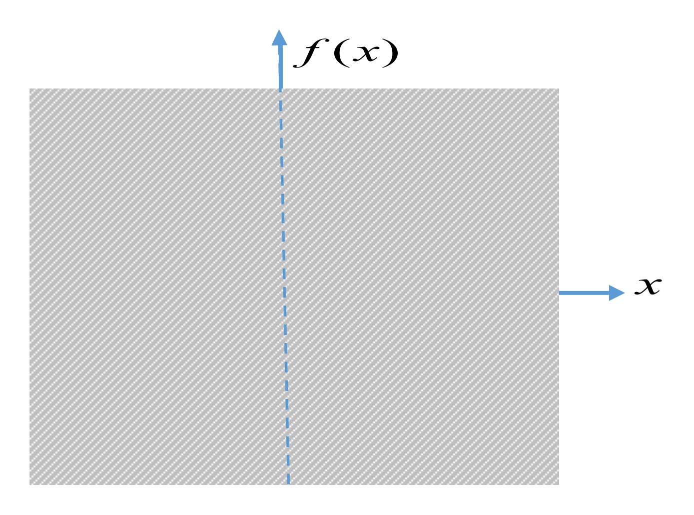
x

Gráfica del dominio
(Región de definición de la función)

4) $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$

RESOLUCIÓN:

$$D_f = \{(x, y) \mid y \neq 0\} \quad R_f = \{z \mid z > 0\}$$



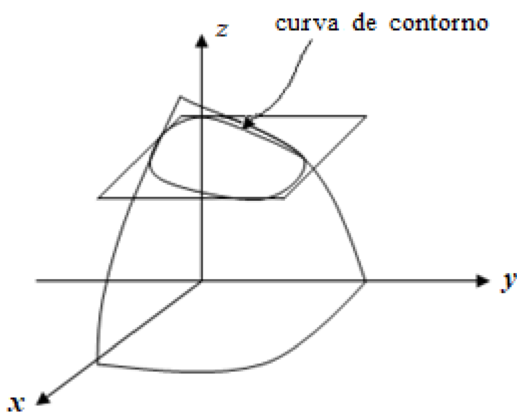
Gráfica del dominio
(Región de definición de la función)

CURVAS DE CONTORNO Y CURVAS DE NIVEL

Dos conceptos muy útiles en el estudio del Cálculo, considerando las funciones de dos variables independientes, son el de la curva de contorno y curva de nivel.

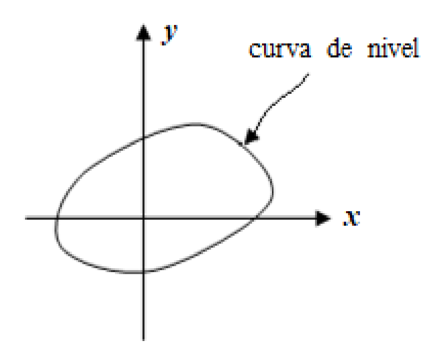
Curvas de contorno

Las curvas de contorno se determinan a partir de la intersección de una superficie con planos paralelos a los planos coordenados. Para el caso de la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ y planos paralelos al plano xy de ecuación $z = k$, $k \in \mathbb{R}$, se tiene la siguiente figura:



Curvas de nivel

Se llama curva de nivel de una función $z = f(x, y)$, a la proyección de la curva de contorno sobre el plano xy.



En algunas aplicaciones, el conjunto de las curvas de nivel es llamado mapas topográficos o mapas de contornos.

Ejemplo

Determinar el dominio y describir las curvas de nivel de la función f dada por:

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$$

RESOLUCIÓN:

a) $D_f = \{(x, y) / 25 - x^2 - y^2 > 0\}$ o $D_f = \{(x, y) / x^2 + y^2 < 25\}$

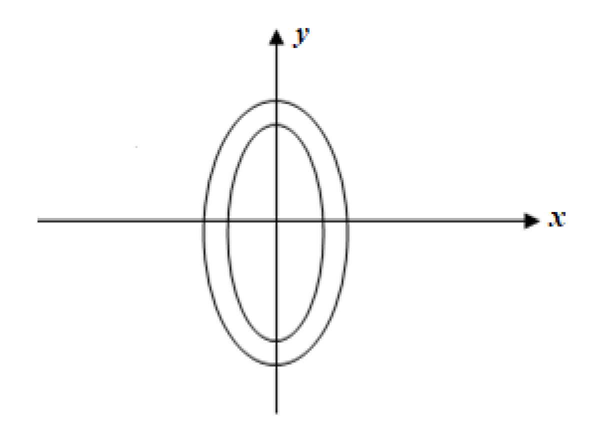
b) Curvas de nivel

Para obtener una curva de nivel, se puede considerar el plano de ecuación $z = 1$ entonces, de $z = f(x, y)$ y $z = 1$ se tiene:

$$1 = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$$

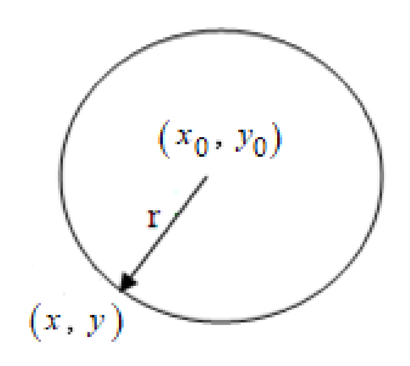
$$\sqrt{25 - x^2 - y^2} = x \quad \Rightarrow \quad 25 - x^2 - y^2 = x^2$$

$$2x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{25}{2}} + \frac{y^2}{25} = 1 \longleftarrow$$ elipse con centro en el origen y eje mayor concidente con el eje y.



4.3 Conceptos de límite y continuidad para funciones escalares de dos variables independientes. Existencia y cálculo de límites

El concepto análogo de intervalo en una función real de variable real, se establece para una función de dos variables definiendo el entorno alrededor de un punto en el plano xy, señalado como (x, y) y que se define como el disco centrado en (x_0, y_0) con radio r. La distancia entre el punto (x, y) y (x_0, y_0) está dada por $d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

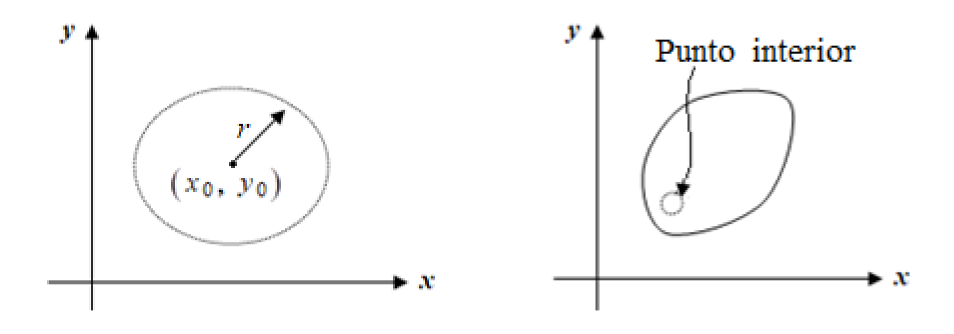


Cuando se maneja la desigualdad $\left\{ (x, y) / \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r \right\}$, se dice que el disco es abierto, porque la expresión anterior contiene la desigualdad menor que $(<)$; cuando contiene la desigualdad menor que o la igualdad $(\leq)$, se dice que el disco es cerrado.

Cuando un punto de la región está dentro del entorno y ese entorno pertenece totalmente a la región, se dice que el punto es interior. Si todos los puntos de esa región son puntos interiores, se dice que la región es abierta.

Un punto (x_0, y_0) es un punto frontera de la región, si cada disco abierto centrado en (x_0, y_0) contiene puntos del interior de la región y puntos del exterior de la región.

Si una región contiene todos sus puntos frontera, decimos que la región es cerrada.



Definición del límite de una función de dos variables

Sea una función f de dos variables definidas, con la posible excepción de (x_0, y_0), en un disco abierto centrado en (x_0, y_0) y sea L un número real.

Entonces: $$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que: $|f(x, y) - L| < \varepsilon$

siempre que $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$

Para una función de dos variables, cuando se escribe $(x, y) \to (x_0, y_0)$, significa que el punto (x, y) se aproxima al punto (x_0, y_0) en cualquier dirección.

Si el valor de $\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ no es el mismo para todas las posibles formas de aproximación o trayectorias a (x_0, y_0), entonces el límite no existe.

CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

La determinación del límite de este tipo de funciones resulta de no poca dificultad, a menos que, con la simple sustitución en la función del valor de la variable independiente se obtenga un valor L, o bien, se emplee la definición, lo cual casi siempre resulta laborioso y de cierta complejidad. Así, resulta conveniente que más allá de la determinación de límites, se establezcan criterios que ayuden a asegurar la no existencia del límite de este tipo de funciones o, en todo caso, a establecer tanto la posible existencia como el posible valor del límite de funciones de dos variables. Uno de estos criterios, que no es más que un caso particular de trayectorias, se conoce como *límites reiterados*, el cual consiste en aproximar el valor de la función mediante la aproximación al punto (x, y), a través de los ejes coordenados o de rectas paralelas a los mismos, lo cual se realiza considerando una trayectoria a la vez, lo que genera el cálculo del límite de un límite.

La notación empleada para el cálculo de límites es la siguiente:

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = \lim_{x \to x_0} \left[\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right]$$

Ejemplos

1) Determinar, si existe, el límite de las funciones que se dan a continuación:

1) $\lim_{(x, y) \to (1, 2)} \dfrac{5x^2 y}{x^2 + y^2} = \dfrac{10}{5} = 2$, de manera directa se obtiene el límite.

2) $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \dfrac{5x^2 y}{x^2 + y^2} = \dfrac{0}{0}$, aquí se tiene una indeterminación.

RESOLUCIÓN:

Para el inciso 2), al realizar el proceso por sustitución directa se obtiene una indeterminación, por lo que aún no se sabe si existe o no el límite.

a) Límites reiterados:

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{5x^2 y}{x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{0}{x^2}\right] = \lim_{x\to 0}\left[0\right] = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{5x^2 y}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0}\left[0\right] = 0$$

b) Trayectorias:

Se realiza la aproximación a través de rectas que pasen por el punto $(0, 0)$.

$y = mx$ familia de rectas que pasa por $(0, 0)$

$f(x, y)$ se expresa en términos de una sola variable

$$f(x, y) = \frac{5x^2 y}{x^2+y^2} \Rightarrow f(x) = \frac{5x^2\, mx}{x^2+x^2 m^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2\, mx}{x^2+x^2 m^2} = \frac{x^2(5m\,x)}{x^2\left(1+m^2\right)} = \frac{5mx}{1+m^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5mx}{1+m^2} = 0$$

Se dice que, si el límite existe, es cero; o bien, se dice que el límite posiblemente es $L=0$.

2) Calcular, si existe, el siguiente límite:

$$\lim_{(x,\, y)\to(1,\, 1)}\frac{xy-x-y+1}{x^2+y^2-2x-2y+2} = \frac{0}{0}$$ indeterminación

a) Límites reiterados:

$$\lim_{(x,\, y)\to(1,\, 1)}\frac{xy-x-y+1}{x^2+y^2-2x-2y+2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{y\to 1}\left[\lim_{x\to 1}\frac{xy-x-y+1}{x^2+y^2-2x-2y+2}\right]=\lim_{y\to 1}\left[\frac{y-1-y+1}{1+y^2-2-2y+2}\right]=\lim_{y\to 1}\left[\frac{0}{(y-1)^2}\right]=\lim_{y\to 1}(0)=0$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\lim_{y\to 1}\frac{xy-x-y+1}{x^2+y^2-2x-2y+2}\right]=\lim_{y\to 1}\left[\frac{x-x-1+1}{x^2+1-2x-2+2}\right]=\lim_{y\to 1}\left[\frac{0}{(x-1)^2}\right]=\lim_{x\to 1}(0)=0$$

Aún no podemos asegurar la existencia del límite.

b) Trayectorias:

Se establece como una trayectoria particular, la de una recta que pase por el punto $P(1,\,1)$; la más sencilla corresponde a $y = x$.

Sustituyendo en $f(x,\,y)$ se obtiene:

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{2x^2-4x+2}=\frac{(x-1)^2}{2(x-1)^2}$$

$\lim_{y\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}=\frac{1}{2}$, por lo tanto, el límite no existe, porque en una de las trayectorias el valor es diferente.

3) Calcular, si existe, el siguiente límite:

$\lim_{(x,\,y,\,z)\to(1,\,2,\,5)}\sqrt{x+y+z}=\sqrt{8}$, por consiguiente, el límite existe y es $\sqrt{8}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Obtenga el límite de la siguiente expresión, si es que existe:

$$\lim_{(x,\, y) \to (1,\, 1)} \frac{x\,y - x - y + 1}{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2}$$

2) Obtenga el límite de la siguiente expresión, si es que existe:

$$\lim_{(x,\, y) \to (1,\, 1)} \frac{x^2 - y}{x - y}$$

3) Obtenga el límite siguiente, si es que existe:

$$\lim_{(x,\, y) \to (1,\, 1)} \frac{y^2 - x\,y - 2x^2}{y - x}$$

4.4 Derivadas parciales e interpretación geométrica para el caso de dos variables independientes. Derivadas sucesivas. Gradiente y derivada direccional. Vector normal a una superficie. Ecuaciones del plano tangente y de la recta normal

DERIVACIÓN PARCIAL DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Definición

Si $z = f(x,\, y)$, entonces, las derivadas parciales primeras de f con respecto a x y y son las funciones f_x y f_y, definidas mediante las expresiones:

$$f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x,\, y) - f(x,\, y)}{\Delta x}$$

$$f_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\, y + \Delta y) - f(x,\, y)}{\Delta y}$$

Las expresiones anteriores se leen como se indica:

Derivada parcial con respecto a x : f_x

Derivada parcial con respecto a y : f_y

Otras notaciones para representar derivadas parciales son:

$$f_x = f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$f_y = f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Ejemplo

Sea la función $z = f_y(x, y) = x^2 + y^2$, obtener $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ utilizando la definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + y^2 - x^2 - y^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x^2 \Delta x + (\Delta x)^2 + y^2 - x^2 - y^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x (2x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2 + (y + \Delta y)^2 - x^2 - y^2}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2 + y^2 + 2y\,\Delta y + (\Delta y)^2 - x^2 - y^2}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} (2y + \Delta y) = 2y$$

Las derivadas parciales primeras, también llamadas derivadas parciales de primer orden, evaluadas en el punto (a, b), se denotan:

$$f_x(a, b) = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a, b)}$$

$$f_y(a, b) = \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a, b)}$$

Ejemplos

1) Sea $f(x, y) = x e^{x^2 y}$. Obtener las derivadas parciales f_x y f_y en el punto $(1, \ln 2)$.

$$f_x = x e^{x^2 y}(2 x y) + e^{x^2 y}$$

$$f_x = 2 x^2 y e^{x^2 y} + e^{x^2 y}$$

$$f_x(1, \ln 2) = 4 \ln 2 + 2$$

$$f_y = x e^{x^2 y} x^2 = x^3 e^{x^2 y}$$

$$f_y(1, \ln 2) = e^{\ln 2} = 2$$

2) Sea $f(x, y, z) = x y + y z^2 + x z$. Obtener f_x, f_y, f_z.

$$f_x = y + z$$

$$f_y = x + z^2$$

$$f_z = 2 y z + x$$

3) Hallar las derivadas parciales primeras de la función:

$$f\left(x,\ y,\ z\right) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$f_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

Entonces, simplificando:

$$f_x = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

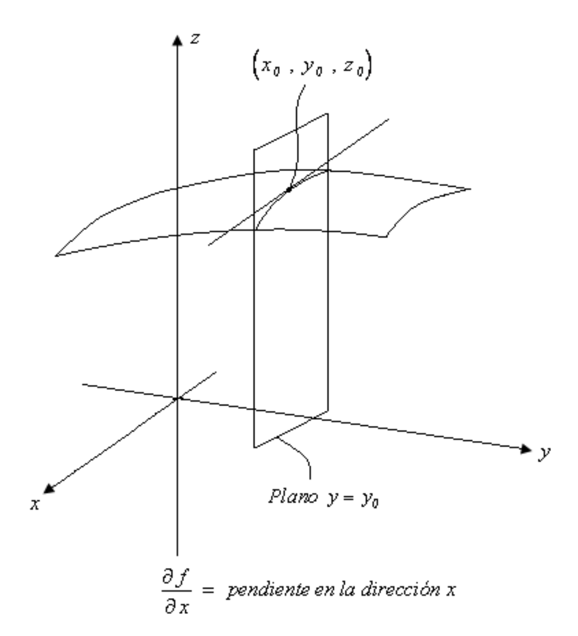
$$f_y = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$f_z = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS DERIVADAS PARCIALES DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

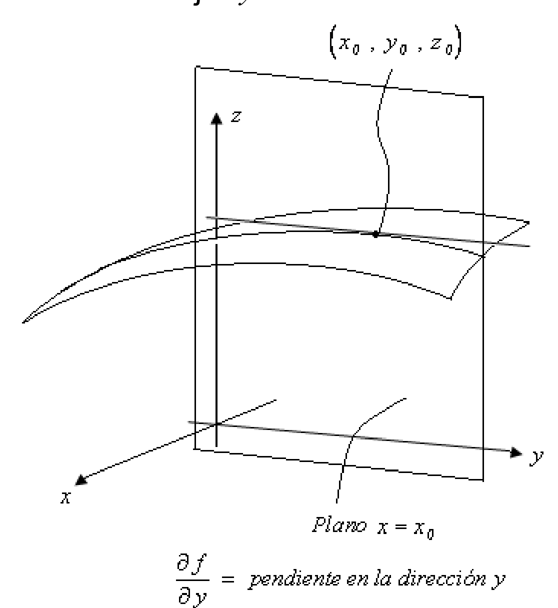
Sea $z = f\left(x,\ y\right)$ una función cuya representación gráfica es una superficie. Al intersecar dicha superficie con un plano paralelo al plano xy, de ecuación $y = y_0$ $\left(y = \text{constante}\right)$, perpendicular al plano xy, se obtiene una curva C. Sea $P_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$ un punto de la curva C, si en ese punto se traza una recta tangente a C, esa recta tiene la dirección del eje x.

La derivada parcial de f con respecto a x representa, geométricamente, la pendiente de la tangente a la curva de intersección de la superficie con el plano $y = y_0$ en el punto P_0, en la dirección del eje x.



De manera análoga, sea $z = f\left(x,\ y\right)$ una función cuya representación gráfica es una superficie. Al intersecar dicha superficie con un plano paralelo al plano yz de ecuación $x = x_0$ $\left(x = \text{constante}\right)$, perpendicular al plano xy, se obtiene una curva C. Sea $P_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$ un punto de la curva C, si en ese punto se traza una recta tangente a C, esa recta tiene la dirección del eje y.

La derivada parcial de f con respecto a y representa, geométricamente, la pendiente de la tangente a la curva de intersección de la superficie con el plano $x = x_0$ en el punto P_0, en la dirección del eje y.



La pendiente de la tangente en cualquiera de los dos casos señalados, también, representa la pendiente de la superficie en el punto P_0 en la dirección respectiva.

Como ocurre con las derivadas ordinarias, es importante tener presente que las **derivadas parciales pueden interpretarse como razones de cambio**, sin importar el número de variables independientes que se tengan.

DERIVADAS PARCIALES SUCESIVAS

Si $z = f(x, y)$, sus primeras derivadas son f_x y f_y; las segundas derivadas son f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} y f_{yx}; las terceras derivadas son f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yyy}, f_{xyy}, f_{yyx}, f_{yxy} y f_{yxx}. Se pueden denotar como sigue:

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

$$f_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$

$$f_{xyx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x}$$

Ejemplo

Demostrar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$

a) $z = x^3 + 3x^2 y$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

Primero se calcula

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6xy$$

Después se aplica la siguiente derivada parcial

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + 6xy\right) = 6x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = 6x$$

Ahora, para el segundo miembro

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Primero se calcula

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + 3x^2 y\right) = 3x^2$$

Después se aplica la siguiente derivada parcial

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = 6x$$

Por lo tanto, se cumple la igualdad.

b) $z = \text{sen}\,(x - 2y)$

De manera similar al ejemplo anterior:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\,(x - 2y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\cos\,(x - 2y)\right]$$

$$= -\,\text{sen}\,(x - 2y)\,(-2)$$

$$= 2\,\text{sen}\,(x - 2y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = 2\,\text{sen}\,(x - 2y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos\left(x - 2y \right) \left(-2 \right) = -2\cos\left(x - 2y \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[-2\cos\left(x - 2y \right) \right] = -2\left[-\operatorname{sen}\left(x - 2y \right) \right] = 2\operatorname{sen}\left(x - 2y \right)$$

Por lo tanto, se cumple la igualdad.

c) $z = e^{x} \tan y$

Primer miembro

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x} \tan y$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x} \tan y \right) = e^{x} \sec^2 y$$

Segundo miembro

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x} \sec^2 y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x} \sec^2 y \right) = e^{x} \sec^2 y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = e^{x} \sec^2 y$$

Por lo tanto, se cumple la igualdad.

Los ejemplos anteriores ilustran la aplicación del siguiente teorema.

IGUALDAD DE LAS DERIVADAS PARCIALES CRUZADAS (MIXTAS)

Teorema

Si f es una función de x y y tal que f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} son continuas en la región abierta R, entonces para cada (x, y) en $\mathbb{R}$:

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

Además, si las derivadas parciales terceras son continuas, se cumple

$$f_{xzz} = f_{zxz} = f_{zzx}$$

Ejemplos

1) Obtenga la pendiente de la superficie de ecuación $f(x, y) = -\dfrac{x^2}{2} + y^2 + \dfrac{25}{8}$ en el punto $P\left(\dfrac{1}{2}, 1, 2\right)$, en las direcciones x y y.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P = -\frac{1}{2}$$

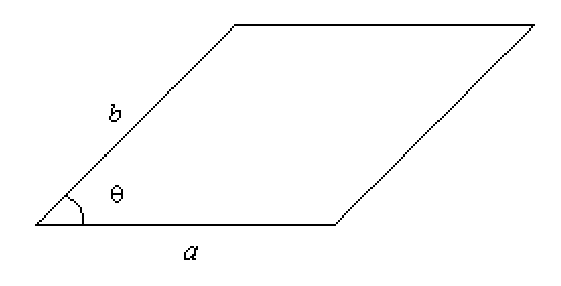
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P = -2$$

2) El área de un paralelogramo, lados adyacentes a y b, y ángulo entre ellos θ está dada por $A = ab \operatorname{sen} \theta$

a) Hallar la razón de cambio del área respecto de a cuando $a = 10$, $b = 10$ y $\theta = \dfrac{\pi}{6}$:

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}(a\,b \operatorname{sen}\theta) = b \operatorname{sen}\theta$$

$$\left.\frac{\partial A}{\partial a}\right|_{\substack{a=10\\ b=20\\ \theta=\frac{\pi}{6}}} = 20 \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 10$$



b) Hallar la razón de cambio del área respecto a θ cuando a , b y θ tienen los mismos valores:

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(a\,b \operatorname{sen}\theta \right) = a\,b\cos\theta$$

$$\left.\frac{\partial A}{\partial a}\right|_{\substack{a=10\\ b=20\\ \theta=\frac{\pi}{6}}} = (10)(20)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 100\sqrt{3}$$

3) Demuestre que las funciones:

a) $z = \operatorname{sen}(x - \mathrm{ct})$; $c = \mathrm{cte.}$

b) $z = \operatorname{sen}(\omega\,\mathrm{ct})\operatorname{sen}(\omega x)$

satisfacen la ecuación de onda $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

a) $\dfrac{\partial z}{\partial t} = -c\cos(x - ct)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = -c(-c)\left[-\operatorname{sen}(x - ct)\right]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -c^2\operatorname{sen}(x - ct)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x - ct)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\cos(x - ct)\right] = -\operatorname{sen}(x - ct)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$-c^2\operatorname{sen}(x - ct) = -c^2\operatorname{sen}(x - ct)$, por lo tanto, se satisface la ecuación de onda

b) $\dfrac{\partial z}{\partial t} = (\omega x)\operatorname{sen}(\omega x)\cos(\omega ct)$

$$\frac{\partial z}{\partial t^2} = -(\omega c)^2 \operatorname{sen}(\omega c) \operatorname{sen}(\omega c t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{sen}(\omega c t) \cos(\omega x)(\omega)$$

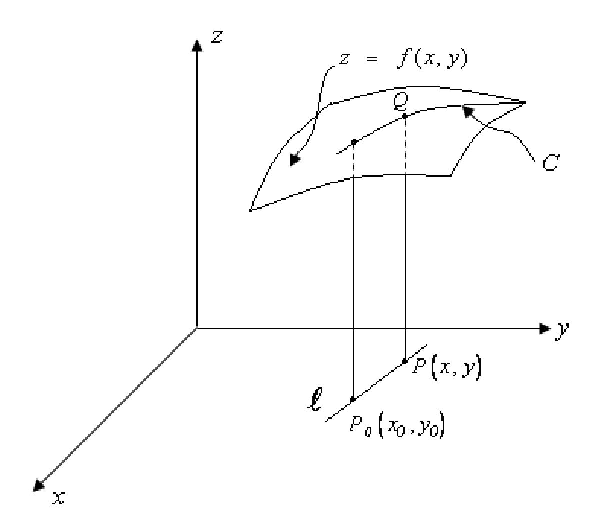
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \omega^2 \operatorname{sen}(\omega c t) \operatorname{sen}(\omega x)$$

Sustituyendo en ecuación de onda:

$$-\omega^2 c^2 (\omega x) \cos(\omega c t) = c^2 \omega^2 \operatorname{sen}(\omega c t) \cos(\omega c t)$$

por lo tanto, se satisface la ecuación de onda.

DERIVADAS DIRECCIONALES. GRADIENTES



Sea $z = f(x, y)$ y P_0 un punto fijo en el plano xy y sea ℓ una recta del plano xy que pasa por $P_0(x_0, y_0)$.

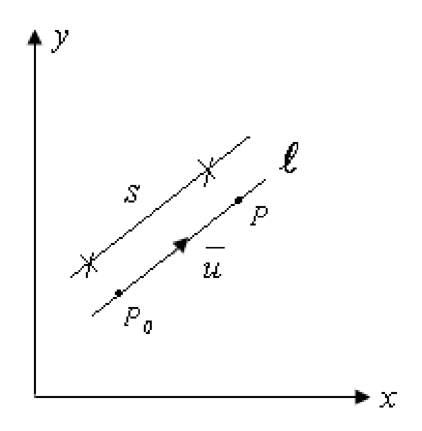
Si un punto $P(x, y)$ se mueve sobre ℓ existe un correspondiente punto Q que se mueve sobre la superficie $z = f(x, y)$, describiendo una curva C .

Si s es la distancia de P_0 a P medida sobre ℓ, entonces, la pregunta que surge es ¿a qué razón cambia la coordenada z de Q con respecto al cambio en s?

Para estudiar esta razón de cambio se introduce un vector unitario:

$$\bar{u} = u_1\, i + u_2\, j = \left(u_1 , u_2 \right)$$

con punto inicial $P_0 \left(x_0 , y_0 \right)$ y que apunta en la dirección del movimiento de $P\left(x , y \right)$ como se ve en la siguiente figura:



Sea s la distancia (con signo) sobre ℓ de $P_0 \left(x_0 , y_0 \right)$ a $P\left(x , y \right)$, siendo s no negativa, cuando P está en la dirección de $\bar{u}$, partiendo de P_0 y negativa en el caso contrario.

El vector $\overline{P_0\, P}$ se relaciona con el vector $\bar{u}$ por medio de $\overline{P_0\, P} = s\,\bar{u}$, es decir, $\left(x - x_0 ,\; y - y_0 \right) = \left(s\,u_1 ,\; s\,u_2 \right)$.

Igualando componentes, se tiene:

$$(1) \qquad \left. \begin{array}{l} x = x_0 + s\,u_1 \\ y = y_0 + s\,u_2 \end{array} \right\} \text{ ecuaciones paramétricas de } \ell$$

Puesto que Q está arriba de $P\left(x , y \right)$ y se encuentra sobre la superficie, la coordenada z de Q es:

$$(2) \qquad z = f\left(x , y \right)$$

o en términos de s, sustituyendo (1) en (2), se tiene:

$$z = f\left(x_0 + s u_1 ,\; y_0 + s u_2 \right)$$

La razón a la que cambia z con relación a s, se calcula usando la regla de la cadena:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds}$$

y de (1):

(3) $$\frac{dz}{ds} = f_x u_1 + f_y u_2$$

Esta ecuación se usa para obtener $\frac{dz}{ds}$ en cualquier lugar de C.

Por ejemplo, haciendo $s = 0$ en (1) y sustituyendo en (3) se obtiene la razón instantánea de cambio de z con respecto a s en $P_0(x_0, y_0)$.

$$\left.\frac{dz}{ds}\right|_{s=0} = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$$

Esta cantidad en general se denota por:

$$D_{\bar{u}}\, z(x_0, y_0) \quad \text{o} \quad D_{\bar{u}}\, f(x_0, y_0)$$

Definición

Si $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) y si $\bar{u} = (u_1, u_2)$ es un vector unitario, entonces la *derivada direccional* de f en (x_0, y_0) en la dirección de $\bar{u}$ se define como:

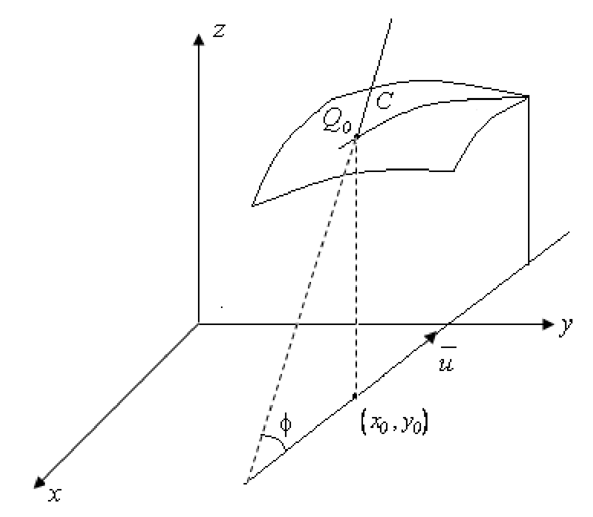
$$D_{\bar{u}}\, f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$$

La derivada direccional $D_{\bar{u}}\, f(x_0, y_0)$ representa la razón instantánea a la que cambia $z = f(x, y)$ con respecto a la distancia, conforme (x, y) y se mueve a partir de (x_0, y_0).

Geométricamente, $D_{\bar{u}} f\left(x_0, y_0\right)$ se puede interpretar como la pendiente de la tangente a la curva C de la siguiente figura en el punto Q_0 ; también

$$D_{\bar{u}} f\left(x_0, y_0\right) = \tan \phi$$

donde ϕ es el ángulo de inclinación de la tangente en Q_0, respecto a la recta ℓ :



Pendiente $= D_{\bar{u}} f\left(x_0, y_0\right) = \tan \phi$

Para los conceptos que manejaremos en este tema es conveniente introducir un nuevo vector relacionado con la derivación direccional.

GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN

Se llama operador diferencial vectorial al operador

$$\bar{\nabla} = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y}$$

o bien,

$$\bar{\nabla} = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

Cuando este operador se aplica a una función diferenciable $z = f(x, y)$, se obtiene lo que se llama *gradiente de una función.*

Formalizando lo anterior se tiene lo siguiente.

Gradiente de una función de dos variables

Sea el operador diferencial vectorial llamado *nabla*

$$\bar{\bar{\nabla}} = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y}$$

o bien,

$$\bar{\bar{\nabla}} = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k$$

Al aplicarlo sobre una función f se obtiene:

$$\bar{\bar{\nabla}} f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j \quad \text{o} \quad \bar{\bar{\nabla}} f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

Al resultado de aplicar el operador nabla sobre una función f se le llama gradiente de la función y, también, se expresa como:

$$\text{grad } f = \bar{\bar{\nabla}} f$$

Si $z = f\left(x,\ y \right)$

$$\nabla z = \bar{\bar{\nabla}} f$$

Ejemplo

Obtener el gradiente de la función $f\left(x,\ y \right) = x^2 - 3xy + y^2$ en el punto $P\left(4,\ 2 \right)$.

RESOLUCIÓN:

$$\bar{\bar{\nabla}} f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$$

$$\bar{\bar{\nabla}} f = \left(2x - 3y \right) i + \left(-3x + 2y \right) j$$

$$\bar{\bar{\nabla}} f \Big|_P = \left[2\left(4 \right) - 3\left(2 \right) \right] i + \left[-3\left(4 \right) + 2\left(2 \right) \right] j$$

$$\bar{\bar{\nabla}} f \Big|_P = 2i - 8j$$

MÉTODO PARA CALCULAR LA DERIVADA DIRECCIONAL

Se puede emplear la definición dada anteriormente, para determinar la derivada direccional $\frac{dz}{ds}$ para una función dada, sin embargo, conviene emplear un método más simple.

El concepto de gradiente de una función es de suma importancia en el cálculo de la derivada direccional como se enuncia a continuación:

Teorema

Si $z = f(x, y)$ es una función diferenciable de x y y, y $\bar{u} = \cos\theta\, i + \operatorname{sen}\theta\, j$, entonces:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{d f(x, y)}{ds} = \bar{\nabla} z \bullet \bar{u}$$

$$\frac{d f(x, y)}{ds} = \bar{\nabla} f(x, y) \bullet \bar{u}$$

$\frac{dz}{ds}$ representa la derivada direccional de la función, en una dirección determinada, que está dada por el vector $\bar{u}$

Ahora, si consideramos que:

$$\frac{dz}{ds} = \bar{\nabla} z \bullet \bar{u} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j \right) \bullet \left(\cos\theta\, i + \operatorname{sen}\theta\, j \right)$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y} \operatorname{sen}\theta$$

Si $\theta = 0°$, se tiene la derivada direccional en la dirección de i, así que:

$$\frac{dz}{ds} = \bar{\nabla} z \bullet \bar{u} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j \right) \bullet \left(\cos\theta\, i + \operatorname{sen}\theta\, j \right)$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos(0°) + \frac{\partial z}{\partial y} \operatorname{sen}(0°) = \frac{\partial z}{\partial x}$$

Si $\theta = 90°$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos(90°) + \frac{\partial z}{\partial y} \operatorname{sen}(90°) = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Esto muestra que las derivadas parciales son casos particulares de la derivada direccional, o bien, la derivada direccional es una generalización de la derivada parcial. Como una consideración adicional, tenemos:

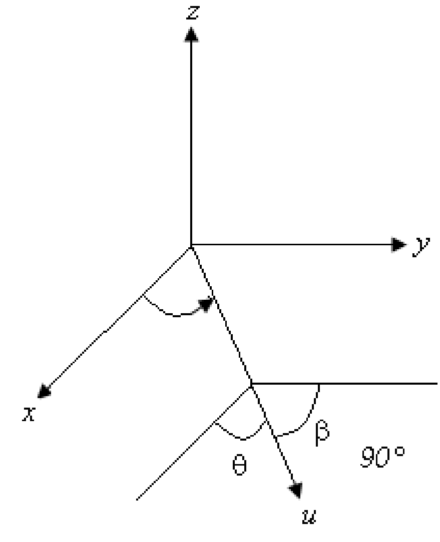
$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{dz}{ds} &= \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}\right\}$$

Se lee: la derivada direccional de z es igual a $\frac{\partial z}{\partial y}$ cuando la dirección corresponde al vector j

$$\left.\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\right\}$$

Se lee: la derivada direccional de z es igual a $\frac{\partial z}{\partial x}$ cuando la dirección corresponde al vector i

Respecto al vector unitario $\bar{u}$, consideremos la siguiente figura:



Un vector unitario cualquiera $\bar{u}$ está dado por sus cosenos directores, es decir:

$$\bar{u} = \cos\theta\, i + \cos\beta\, j$$

pero, como $\beta = \cos\left(90° - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta$

luego $\bar{u} = \cos\theta\, i + \cos\beta\, j = \cos\theta\, i + \operatorname{sen}\theta\, j$

Además, de acuerdo con lo señalado anteriormente

$$\bar{\nabla} f \bullet \bar{u} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j \right] \bullet \left[\cos\theta\, i + \operatorname{sen}\theta\, j \right]$$

$$\bar{\nabla} f \bullet \bar{u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y} \operatorname{sen}\theta$$

$$\bar{\nabla} f \bullet \bar{u} = f_x \cos\theta + f_x \operatorname{sen}\theta = D_u f = \frac{d f}{d s}$$

$$D_{\bar{u}} f = \bar{\nabla} f \bullet \bar{u}$$

Ejemplos

1) Obtener la derivada direccional de $f(x,y) = 2x^2 y^3 + 6xy$ en $(1, 1)$ en la dirección de un vector unitario, cuyo ángulo con el eje positivo x es $\theta = \frac{\pi}{6}$

RESOLUCIÓN:

$$\frac{dz}{ds} = \bar{\nabla} z \bullet \bar{u}$$

$$\bar{\nabla} z = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\, i + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\, j$$

$$\bar{\nabla} z = \left(4xy^3 + 6y\right) i + \left(6x^2 y^2 + 6x\right) j$$

Evaluando en el punto dado

$$\bar{\nabla} z \Big|_{(1,1)} = 10i + 12j$$

Ahora, necesitamos un vector unitario en la dirección dada por el ángulo $\theta = \frac{\pi}{6}$:

$$\bar{u} = \cos\theta\, i + \operatorname{sen}\theta\, j$$

$$\bar{u}_u = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} \qquad \text{o} \qquad \bar{u} = \cos 30° i + \operatorname{sen} 30° j$$

$$\bar{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, i + \frac{1}{2}\, j$$

$$\frac{d}{ds} f(x,\, y) = \frac{dz}{ds} = \bar{\nabla} z \bullet \bar{u} = (10\, i + 12 j) \bullet \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, i + \frac{1}{2} \right) j$$

$$\frac{dz}{ds} = 5\sqrt{3} + 6$$

2) Sea el plano que es perpendicular al plano xy, y que pasa por los puntos $P(2,1)$ y $Q(3,2)$. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de dicho plano con la superficie $f(x,y) = 4x^2 + y^2$, en el punto P en la dirección de Q?

RESOLUCIÓN:

La pendiente de la recta tangente está dada por la derivada direccional de la función en la dirección de un vector $\bar{u}$:

$$\frac{df}{ds} = \bar{\nabla} f \bullet \bar{u}$$

donde $\bar{u} = \dfrac{\overline{PQ}}{|\overline{PQ}|}$

$$\overline{PQ} = (3,2) - (2,1) = (1,1) \;\; ; \;\; |\overline{PQ}| = \sqrt{2}$$

$$\bar{u} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j$$

El gradiente de f es

$$\overline{\nabla} f = f_x i + f_y j = 8x\, i + 2y\, j$$

Evaluando en P

$$\overline{\nabla} f\left(2,1\right) = 16\, i + 2\, j$$

Por lo que la pendiente resulta de

$$\frac{df}{ds} = \left(16\, i + 2\, j\right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j\right)$$

$$\frac{df}{ds} = \frac{18}{\sqrt{2}}$$

Ejemplo

Evaluar la derivada direccional de

$$F\left(x, y, z\right) = x\, y^2 - 4x^2 y + z^2$$

en el punto P (1, -1, 2), en la dirección del vector $6\, i + 2\, j + 3\, k$

RESOLUCIÓN:

Para el caso de una función de tres variables independientes, se tiene:

$$\frac{dF}{ds} = \overline{\nabla} F \bullet \overline{u}$$

Calculando el gradiente:

$$\overline{\nabla} F = F_x\, i + F_y\, j + F_z k$$

$$\overline{\nabla} F = \left(y^2 - 8x\, y\right) i + \left(2x\, y - 4x^2\right) j + \left(2z\right) k$$

Evaluando en el punto P

$$\overline{\nabla} F\left(1, -1, 2\right) = \left[1 - 8\left(1\right)\left(-1\right)\right]\, i + \left[2\left(1\right)\left(-1\right) - 4\left(1\right)\right]\, j + 2\left(2\right)\, k$$

$$\overline{\nabla} F\left(1, -1,\ 2\right) = 9\, i - 6\, j + 4\, k$$

Para el vector unitario

$$\bar{u} = \frac{(6,2,3)}{\sqrt{36+4+9}} = \frac{(6,2,3)}{7} = \left(\frac{6}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right)$$

o bien

$$\bar{u} = \frac{6}{7}i + \frac{2}{7}j + \frac{3}{7}k$$

De lo anterior

$$\frac{dF}{ds} = (9i - 6j + 4k) \bullet \left(\frac{6}{7}i + \frac{2}{7}j + \frac{3}{7}k\right)$$

Finalmente:

$$\frac{dF}{ds} = \frac{54}{7} - \frac{12}{7} + \frac{12}{7} = \frac{54}{7}$$

VALOR MÁXIMO DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

En diversos problemas de aplicación, conviene obtener el máximo valor de la derivada direccional.

Supongamos que f representa una función de dos o tres variables y recordando las expresiones de la derivada direccional para cada caso, se tiene:

$$\frac{d\,f(x,\ y)}{ds} = \bar{\nabla} f \bullet \bar{u}$$

$$\frac{d\,f(x,\ y,\ z)}{ds} = \bar{\nabla} f \bullet \bar{u}$$

Se observa que la derivada direccional se expresa como un producto escalar, entonces, de conceptos anteriores sobre el álgebra vectorial, se tiene:

El producto escalar de dos vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es el escalar:

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\theta$$

$\theta =$ ángulo entre los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ $\quad 0 \leq \theta \leq \pi$

De lo anterior, para la derivada direccional podemos escribir:

$$\frac{df}{ds} = \bar{\nabla} f \bullet \bar{u} = \left| \bar{\nabla} f \right| \left| \bar{u} \right| \cos\theta \quad ; \quad \left| \bar{u} \right| = 1$$

$$= \left| \bar{\nabla} f \right| \cos\theta$$

como $0 \leq \theta \leq \pi$, entonces,

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$

y, en consecuencia,

$$-\left|\bar{\nabla} F\right| \leq \frac{df}{ds} \leq \left|\bar{\nabla} F\right|$$

En otras palabras, diremos:

El valor máximo de la derivada direccional es $\left| \bar{\nabla} f \right|$ y ocurre cuando $\bar{u}$ tiene la misma dirección que $\bar{\nabla} f$ $\left(\text{cuando } \cos\theta = 1\right)$.

El valor mínimo de la derivada direccional es $-\left| \bar{\nabla} f \right|$ y ocurre cuando $\bar{u}$ y $\bar{\nabla} f$ tienen direcciones opuestas $\left(\text{cuando } \cos\theta = -1\right)$.

Con respecto al concepto de gradiente:

El vector gradiente $\bar{\nabla} f$ apunta en la dirección en la cual f crece con mayor rapidez, mientras que $-\bar{\nabla} f$ apunta en la dirección en que decrece f más rápidamente.

De lo anterior, se establecen las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DEL GRADIENTE Y DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

Si $z = f(x, y)$ y $\bar{u} = u_1 i + u_2 j$ es un vector unitario:

1) La derivada direccional $D_{\bar{u}} f$ en dirección de $\bar{u}$ está dada por:

$$\frac{df}{ds} = D_{\bar{u}} f \Big|_{P_0} = \bar{\nabla} f \Big|_{P_0} \cdot \bar{u} = \left(f_x i + f_y j \right) \cdot \left(u_1 i + u_2 j \right)$$

2) El gradiente de f es:

$$\bar{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j = f_x i + f_y j$$

3) Si $\bar{\nabla} f = \bar{0}$, entonces, $D_{\bar{u}} f = 0$

4) La dirección de máximo crecimiento de f está dada por $\bar{\nabla} f \left(x_0 , y_0 \right)$ y el valor máximo de $D_{\bar{u}} f \left(x_0 , y_0 \right)$ lo da por $\left| \bar{\nabla} f \left(x_0 , y_0 \right) \right|$.

5) La dirección de mínimo crecimiento de f está dado por $-\bar{\nabla} f \left(x_0 , y_0 \right)$ y el valor mínimo de $D_{\bar{u}} f \left(x_0 , y_0 \right) = -\left| \bar{\nabla} f \left(x_0 , y_0 \right) \right|$.

Ejemplos

1) La temperatura en $\left[{}^\circ C \right]$ sobre la superficie de una placa metálica está dada por $T\left(x, y \right) = 20 - 4x^2 - y^2$ donde x, y están en pulgadas.

Desde el punto $\left(2, -3 \right)$ ¿en qué dirección crece la temperatura más rápidamente?, ¿a qué ritmo se produce este crecimiento?

RESOLUCIÓN:

La dirección de máximo crecimiento la determina el gradiente de la función, por lo que:

$$\bar{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial x} i + \frac{\partial y}{\partial y}$$

$$\bar{\nabla} T = -8xi - 2yj$$

$$\bar{\nabla} T = \left(2, -3 \right) = 16i + 6j \longleftarrow \text{dirección de máximo creciente}$$

El ritmo de crecimiento es:

$$\left|\bar{\nabla}T\left(2,\ -3\right)\right| = \sqrt{\left(-16\right)^2 + \left(6\right)^2} = 17.09\ \frac{°C}{\text{pulgada}}$$

2) La temperatura $T\left(x,\ y,\ z\right)$ en cualquier punto de un sólido del espacio tridimensional es $T\left(x,\ y,\ z\right) = \dfrac{40}{x^2 + y^2 + z^2 + 3}$ y la distancia en metros.

a) Determinar la razón de cambio de la temperatura en el punto $\left(-3,\ 2,\ -2\right)$ en la dirección del vector $2i - 3j + 6k$.

b) Determinar la dirección de la máxima tasa de variación de T en el punto $\left(-3,\ 2,\ -2\right)$.

RESOLUCIÓN:

a) $D_{\bar{u}}\bar{T} = \bar{\nabla}T \bullet \bar{u}$

$$\bar{\nabla}T = \frac{\partial T}{\partial x}i + \frac{\partial T}{\partial y}j + \frac{\partial T}{\partial z}k$$

$$\bar{\nabla}T = -\frac{80x}{\left(x^2 + y^2 + z^2 + 3\right)^2}i - \frac{80y}{\left(x^2 + y^2 + z^2 + 3\right)^2}j - \frac{80z}{\left(x^2 + y^2 - z^2\right)^2}k$$

$$\bar{\nabla}T\Big|_{(-3,\ 2,\ -2)} = \frac{3}{5}i - \frac{2}{5}j + \frac{2}{5}k$$

$$\bar{u} = \left(\frac{2i - 3j + 6k}{7}\right) = \frac{1}{7}\left(2i - 3j + 6k\right)$$

$$D_{\bar{u}}\bar{T} = \frac{1}{7}\left(\frac{3}{5}i - \frac{2}{5}j + \frac{2}{5}k\right)\left(2i - 3j + 6k\right)$$

$$D_{\bar{u}}\bar{T} = 0.68\ °/\text{metro}$$

b) La dirección requerida es la del vector gradiente:

$$\frac{3}{5}i - \frac{2}{5}j + \frac{2}{5}k$$

Ejemplo

La temperatura en una caja rectangular es aproximada por:

$$T(x, y, z) = xyz(1-x)(2-y)(3-z)$$

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2, \quad 0 \le z \le 3$$

Si un mosquito se localiza en $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$, ¿en qué dirección debe volar para enfriarse lo más rápidamente posible?

RESOLUCIÓN:

Este es un problema de derivada direccional, por lo que es necesario calcular el gradiente de T.

Inicialmente se efectúan algunas operaciones

$$T(x, y, z) = \left(xyz - x^2yz\right)(2-y)(3-z)$$

$$= \left(xyz - x^2yz\right)(6 - 2z - 3y + yz)$$

El gradiente está dado por

$$\overline{\nabla}T = T_x i + T_y j + T_z k$$

$$\overline{\nabla}T(x, y, z) = (yz - 2xyz)(2-y)(3-z)i$$

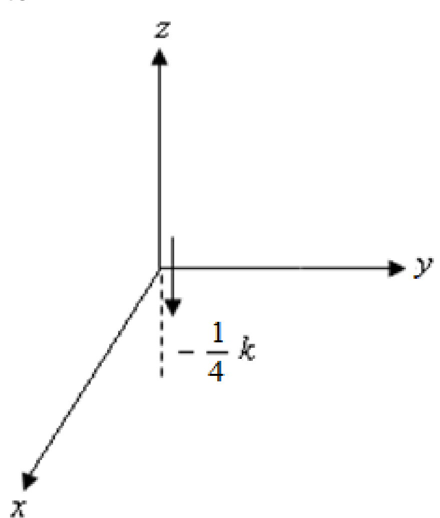
$$+\left(xz - x^2z\right)(-3+y)j$$

$$+\left(xy - x^2y\right)(-2+y)k$$

Para el punto dado:

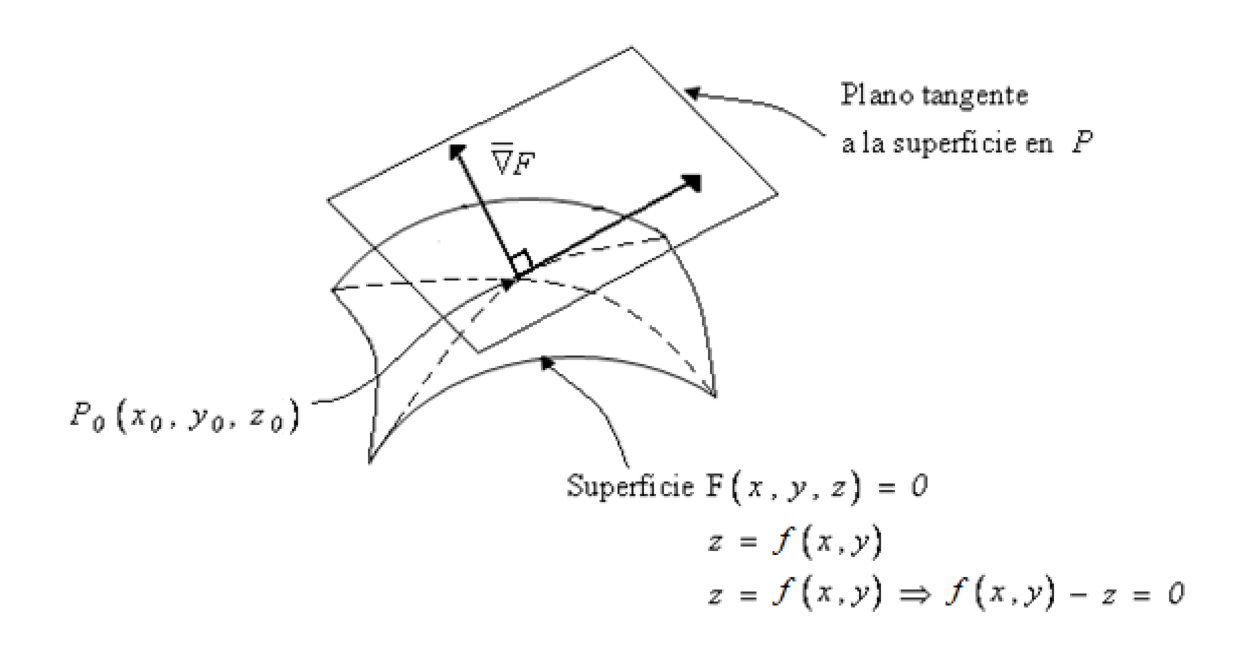
$$\overline{\nabla} T\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right)=\frac{1}{4}k$$

Entonces, el mosquito debe volar en la dirección de $-\frac{1}{4}k$ para que su temperatura disminuya más rápidamente.



INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL GRADIENTE

Sea π el plano tangente en el punto $P\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$ a la superficie representada por $F\left(x,\ y,\ z\right)=0$, según se muestra en la siguiente figura:



El gradiente de $F(x, y, z)$ evaluado en un punto, representado por $\nabla F|_{P_0}$, es un vector normal al plano tangente a la superficie en ese punto. De esta forma, es posible obtener la ecuación de dicho plano, como se muestra enseguida.

La ecuación del plano tangente es:

$$\left(\bar{P} - \bar{P}_0\right) \bullet \bar{N} = 0$$ Ecuación normal del plano

Sustituyendo las coordenadas respectivas

$$\left[(x, y, z) - \left(x_0, y_0, z_0\right)\right] \bullet \left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right]_{P_0} = 0$$

$$\left(x - x_0, \quad y - y_0, \quad z - z_0\right) \bullet \left(f_x, \quad f_y, \quad f_z\right)\Big|_{P_0} = 0$$

$$f_x|_{P_0}\left(x - x_0\right) + f_y|_{P_0}\left(y - y_0\right) + f_z|_{P_0}\left(z - z_0\right) = 0$$ Ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie.

Por otro lado, la recta normal al plano tangente a la superficie, también es normal a la superficie y tiene la dirección del vector $\nabla F|_{P_0}$. De esta forma, es posible obtener la ecuación de esa recta, considerando que el vector director $\bar{u} = (a, b, c)$, vector director de la recta, es paralelo al vector $\nabla F|_{P_0}$.

Entonces, la ecuación de la recta normal a la superficie en un punto P_0, está dada por

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$ Ecuaciones simétricas de la recta

$\bar{u} = (a, b, c) \longleftarrow$ vector director, $\bar{u} = \left|\nabla F\right|_P$

Se formaliza lo anterior a continuación.

PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL

En estudios básicos de álgebra vectorial, nos hemos referido a ecuaciones de rectas tangentes a gráficas de funciones. En el espacio tridimensional, podemos resolver problemas análogos de encontrar ecuaciones de planos tangentes a superficies.

Si $F(x, y, z) = 0$ es la ecuación de una superficie, se define el plano tangente en $P(x_0, y_0, z_0)$ como el plano que pasa por P con vector normal $\overline{\nabla} F(x_0, y_0, z_0)$, siempre que $\overline{\nabla} F \neq 0$.

Entonces, si (x, y, z) y (x_0, y_0, z_0) son puntos del plano tangente y r y $\overline{r}_0$ sus respectivos vectores de posición, una ecuación vectorial del plano tangente es:

$$\overline{\nabla} F(x_0, y_0, z_0) \bullet (\overline{r} - \overline{r}_0) = 0$$

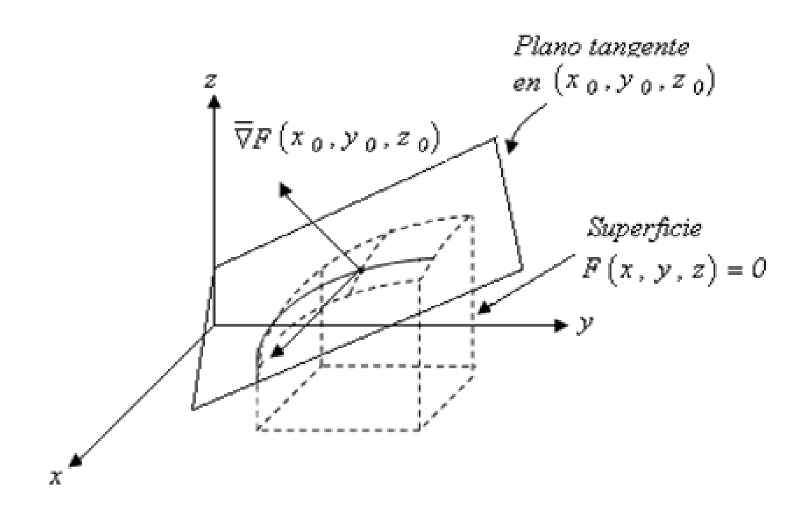
o bien:

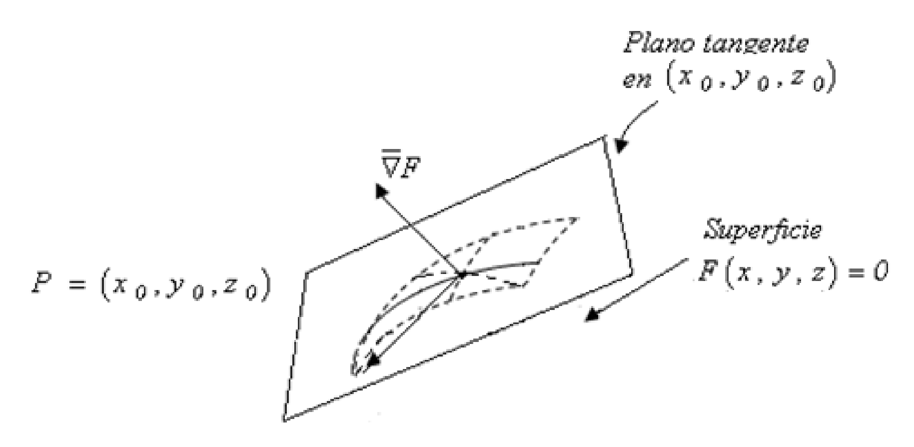
$$\left[F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\right] \bullet (\overline{r} - \overline{r}_0) = 0$$

que también podemos escribir como:

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Lo anterior se ilustra en la siguiente figura:





Plano tangente a la superficie S en P

De lo anterior, podemos decir que el gradiente en P es ortogonal al vector tangente de cualquier curva sobre S que pase por P.
Por tanto, todas las rectas tangentes en P están en un plano que es normal a $\overline{\nabla} F\left(x_0, y_0, z_0\right)$ y contienen a P.

Como ya hemos mencionado, llamamos a este plano, *plano tangente a* S *en* P.

Definición. Plano tangente y recta normal

Sea F diferenciable en $P\left(x_0, y_0, z_0\right)$ donde la superficie S se da por $F(x, y, z) = 0$, tal que $\overline{\nabla} F\left(x_0, y_0, z_0\right) \neq 0$

1) El plano que pasa por P y es normal a $\overline{\nabla} F\left(x_0, y_0, z_0\right)$ se conoce como el plano tangente a S en P.

2) La recta que pasa por P y que tiene la dirección de $\overline{\nabla} F\left(x_0, y_0, z_0\right)$ se conoce como la recta normal a S en P.

Entonces, para la ecuación del plano tangente:

Si F es diferenciable en $\left(x_0, y_0, z_0\right)$, una ecuación del plano tangente a la superficie está dada por

$$F_x\left(x_0, y_0, z_0\right)\left(x - x_0\right) + F_y\left(x_0, y_0, z_0\right)\left(y - y_0\right) + F_z\left(x_0, y_0, z_0\right)\left(z - z_0\right) = 0$$

Ejemplo

Hallar la ecuación del plano tangente al hiperboloide $z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0$ en el punto $P\,(1, -1, 4)$.

RESOLUCIÓN:

$$F(x, y, z) = 0$$

$$z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0$$

Se calcula el gradiente: $\overline{\nabla} F = F_x i + F_y j + F_z k$

Tenemos

$$F_x = -4x$$

$$F_y = -4y$$

$$F_z = 2z$$

Evaluando en P:

$$F_x = -4$$

$$F_y = 4$$

$$F_z = 8$$

Sustituyendo en la ecuación del plano tangente:

$$-4(x-1) + 4(y+1) + 8(z-4) = 0$$

$$-4x + 4 + 4y + 4 + 8z - 32 = 0$$

Finalmente

$$4x - 4y - 8z + 24 = 0$$

4.5 Función diferenciable. Diferencial total. Comparación entre el incremento y la diferencial total

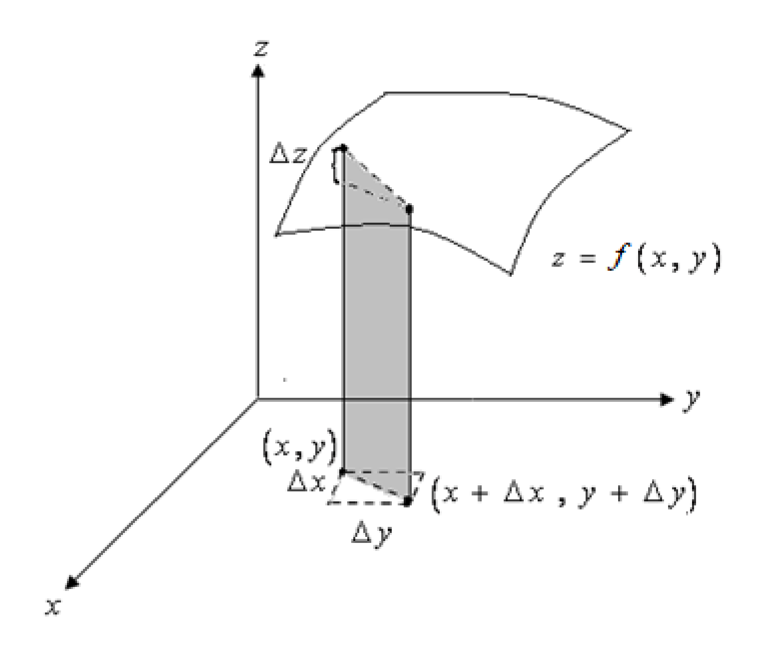
La noción de diferenciabilidad de una función, de cualquier número de variables independientes, depende del incremento de la variable dependiente. Recuérdese que para una función de una variable $y = f(x)$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

y para su respectiva diferencial:

$$dy = f'(x)\, dx$$

De manera análoga, para una función de dos variables $z = f(x, y)$, se define $\Delta z = f(x + \Delta x, \; y + \Delta y) - f(x, y)$.



La figura anterior muestra que Δz da la magnitud del cambio de la función cuando (x, y) varía a $(x + \Delta x, \; y + \Delta y)$.

Y para la diferencial de una función de dos variables, se tiene:

Definición de diferencial total

Sea $z = f(x, y)$ y sean Δx y Δy los incrementos en las variables x y y, respectivamente. En tal caso, las diferenciales de cada una de las variables independientes son $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$ y la diferencial total de $z = f(x, y)$ se da por:

$$dz = f_x \, dx + f_y \, dy$$

Esta definición se hace extensiva a funciones de tres o más variables.

DIFERENCIABILIDAD

De conceptos previos de Cálculo se sabe que si una función está dada por $y = f(x)$ y es diferenciable, se puede utilizar la diferencial $dy = f'(x)\,dx$ como una aproximación al valor del incremento de la función $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Si esto es posible para una función de dos variables, se dice que la función es diferenciable como se enuncia en la siguiente definición.

Definición de diferenciabilidad

Una función dada por $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0), si Δz puede expresarse en la forma:

$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$ donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. La función f es diferenciable en una región R, si es diferenciable en todo punto de R.

Ejemplo

Verificar si la función dada por $f(x, y) = x^2 + 2y$ es diferenciable en todo punto del plano.

RESOLUCIÓN:

Para $z = f(x, y)$, el incremento de z en un punto arbitrario (x, y) en el plano es:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, \ y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$\Delta z = \left[(x + \Delta x)^2 + 2(y + \Delta y)\right] - \left(x^2 + 2y\right)$$

$$= \left[\left(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2\right) + 2(y + \Delta y)\right] - \left(x^2 + 2y\right)$$

$$= 2x\,\Delta x + \Delta x^2 + 2\Delta y$$

$$= 2x(\Delta x) + 2(\Delta y) + (\Delta x)\Delta x + 0(\Delta y)$$

$$= f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde $\varepsilon_1 \Delta x$ y $\varepsilon_2 = 0$. Como $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$, cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, se concluye que f es diferenciable en todo punto del plano.

Es conveniente precisar que el concepto *diferenciable*, cuando se emplea en funciones de dos variables, debe considerar el siguiente teorema que establece una condición suficiente para la diferenciabilidad de una función de dos variables.

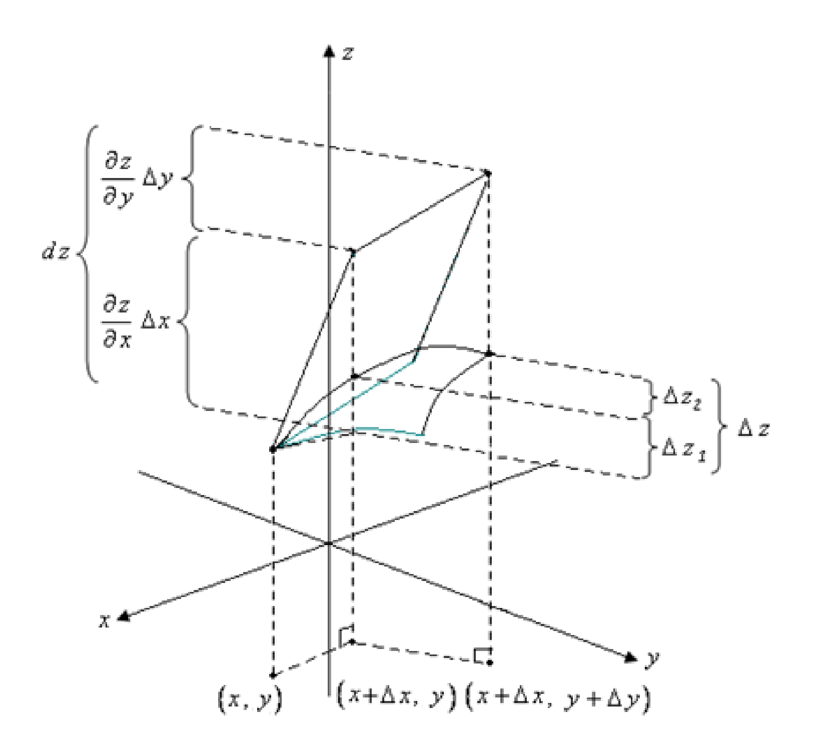
Teorema. Condición suficiente para la diferenciabilidad

Si f es una función de x y y, para la que f_x y f_y son continuas en una región abierta R, entonces, f es diferenciable R.

La definición mencionada sobre diferenciabilidad establece que se puede elegir $(x + \Delta x, \ y + \Delta y)$ suficientemente cerca de (x, y) para hacer que los productos $\varepsilon_1 \Delta x$ y $\varepsilon_2 \Delta y$ sean insignificantes. Dicho de otra forma, para Δx y Δy pequeños, se puede usar la aproximación:

$$\Delta z \approx dz$$

Gráficamente, se puede observar la aproximación anterior en la siguiente figura:



Es conveniente tener presente que las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ pueden interpretarse como las pendientes de la superficie en las direcciones de x y y. Lo anterior implica que:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\Delta y$$

es el cambio en la altura de un plano tangente a la superficie en el punto $\left(x,\ y,\ f\left(x,\ y\right)\right)$. Resulta interesante considerar que, si un plano en el espacio se representa mediante una ecuación lineal en las variables x, y y z, entonces, la aproximación de Δz mediante dz recibe el nombre de aproximación lineal.

USO DE LA DIFERENCIAL COMO UNA APROXIMACIÓN

Enseguida, se ilustra una aplicación del concepto de diferencial.

Ejemplo

Utilizar la diferencial dz para aproximar el cambio en $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ cuando $(x,\ y)$ se desplaza del punto $(1,\ 1)$ al punto $(1.01,\ 0.97)$. Comparar esta aproximación con el cambio exacto en z.

RESOLUCIÓN:

Se hace $(x,\ y) = (1,\ 1)$ y $(x + \Delta x,\ \ y + \Delta y) = (1.01,\ \ 0.97)$ y se obtiene $dx = \Delta x = 0.01$ y $dy = \Delta y = -0.03$. Por tanto, el cambio en z puede aproximarse mediante:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\, \Delta x + \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\, \Delta y$$

Cuando $x = 1$ y $y = 1$, se tiene:

$$\Delta z \approx -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(0.01) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-0.03) = \frac{0.02}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,(0.01) \approx 0.0141$$

El cambio exacto corresponde a la diferencia entre las alturas de dos puntos sobre la superficie de un hemisferio. Esta diferencia está dada por:

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(1.01,\ 0.97) - f(1,\ 1)\\ &= \sqrt{4 - (1.01)^2 - (0.97)^2} - \sqrt{4 - 1^2 - 1^2} \approx 0.0137\end{aligned}$$

Una función de tres variables $w = f(x,\ y,\ z)$ se dice que es diferenciable en $(x,\ y,\ z)$, si:

$$\Delta w = f(x + \Delta x,\ \ y + \Delta y,\ \ z + \Delta z) - f(x,\ y,\ z)$$

y puede expresarse en la forma:

$$\Delta w = f_x\, \Delta x + f_y\, \Delta y + f_z\, \Delta z + \varepsilon_1\, \Delta x + \varepsilon_2\, \Delta y + \varepsilon_3\, \Delta z$$

donde $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ y $\varepsilon_3 \to 0$ cuando $(\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z) \to (0,\ 0,\ 0)$. Con esta definición de diferenciabilidad, el teorema anterior se puede extender de la siguiente manera a funciones de tres variables:

si f es una función de x, y y z, donde f, f_x, f_y y f_z son continuas en una región abierta R, entonces f es diferenciable en R.

CÁLCULO DE ERRORES

Otra de las aplicaciones de las diferenciales consiste en el cálculo de errores, según se muestra enseguida.
Si $y = f(x)$

$$\text{Error absoluto} = \left| \Delta y - dy \right|$$

A la relación $\dfrac{\text{Error absoluto}}{\Delta y}$ se le llama *error relativo*, entonces:

$$\text{Error relativo} = \left| \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \right|$$

$$\text{Porcentaje de error relativo en la aproximación} = \left| \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \right| \times 100$$

$$\text{Porcentaje de error relativo en la aproximación} = \frac{\Delta f}{f} \times 100$$

Ejemplos

1) El error producido al medir cada una de las dimensiones de una caja rectangular es $\pm\ 0.1$ milímetros. Las dimensiones de la caja son $x = 15$ centímetros, $y = 50$ centímetros y $z = 20$ centímetros. Utilizar dV para estimar el error propagado y el error relativo en el volumen calculado de la caja.

RESOLUCIÓN:

El volumen de la caja está dado por $V = x\,y\,z$ y, por tanto

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz$$

$$= yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

Utilizando 0.1 milímetros $= 0.01$ centímetros, se tiene $dx = dy = dz = \pm\, 0.01$ y el error propagado es aproximadamente:

$$
\begin{aligned}
dV &= (50)(20)(\pm\, 0.01) + (15)(20)(\pm\, 0.01) + (15)(50)(\pm\, 0.01) \\
&= 1000\,(\pm\, 0.01) + 300\,(\pm\, 0.01) + 750\,(\pm\, 0.01) \\
&= 2050\,(\pm\, 0.01) = \pm\, 20.5 \ \text{cemtímetros cúbicos}
\end{aligned}
$$

Como el volumen medido es $V = (15)(50)(25) = 15\,000$ centímetros cúbicos, el error relativo $\frac{\Delta V}{V}$ es aproximadamente

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{20.5}{15\,000} \approx 0.14\,\%$$

Como ocurre con una función de una sola variable, si una función de dos o más variables es diferenciable en un punto, también es continua en él.

2) El radio r y la altura h de un cilindro circular recto se mide con un error posible del 4% y 2%, respectivamente, aproxímese al error porcentual al medir el volumen.

RESOLUCIÓN:

$$V = \pi r^2 h$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}\, dr + \frac{\partial V}{\partial h}\, dh$$

$$dV = 2\pi rh\, dr + \pi r^2\, dh$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{2\pi rh}{\pi r^2 h}\, dr + \frac{\pi r^2}{\pi r^2 h}\, dh$$

$$\frac{dV}{V} = 2\,\frac{dr}{r} + \frac{dh}{h}$$

$$\frac{dr}{r} \times 100 = 4\%$$

$$\frac{dh}{h} \times 100 = 2\%$$

$$\frac{dV}{V}\% = 2(4\%) + 2\%$$

$$\frac{dV}{V}\% = 10\%$$

4.6 Función de función. Regla de la cadena para funciones de varias variables

Sean las funciones $z = f(u, v)$; $u = g(x, y)$; $v = h(x, y)$, entonces, se puede expresar a la función z de la siguiente manera:

$$z = f(u(x, y), v(x, y))$$

la cual representa a una función de función.

Las derivadas parciales de esta función respecto a las variables independientes x y y son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

El proceso descrito se conoce como regla de la cadena.

Ahora, si tenemos:

$$z = f(u, v); \quad u = g(t); \quad v = h(t);$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

Caso especial de la regla de la cadena

Ejemplos

1) Mediante la regla de la cadena, obtenga $\frac{\partial w}{\partial s}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$ para $w = x\,y$, $x = s^2 + t^2$, $y = \frac{s}{t}$.

RESOLUCIÓN:

$$w = w(x,\ y)$$

$$x = x(s,\ t)$$

$$y = y(s,\ t)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \bullet \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \bullet \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = y(2s) + x\left(\frac{1}{t}\right)$$

Sustituimos x y y para expresar $\frac{\partial w}{\partial s}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$ en términos de x y t:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 2\left(\frac{s}{t}\right)s + \left(s^2 + t^2\right)\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{2s^2}{t} + \frac{\left(s^2 + t^2\right)}{t} = \frac{2s^2 + s^2 + t^2}{t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{3s^2 + t^2}{t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial s} \bullet \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \bullet \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = y\,(2t) + x\left(-\frac{s}{t^2}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 2\left(\frac{s}{t}\right) t + \left(s^2 + t^2\right)\left(-\frac{s}{t^2}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 2\,s - \frac{s^3}{t^2} - s$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = s - \frac{s^3}{t^2}$$

2) Obtenga $\frac{\partial w}{\partial s}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$, para $w = y^3 - 3x^2 y$, $x = e^s$, $y = e^t$ y evalúe estas derivadas parciales en $s = 0$ y $t = 1$.

RESOLUCIÓN:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \bullet \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \bullet \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = (6\,x\,y)\left(e^s\right) + \left(3y^2 - 3x^2\right)(0)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\,6\,x\,y\,e^s$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\,6\left(e^s\right)\left(e^t\right)\left(e^s\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\,6\,e^{2s+t}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial s}\right|_{\substack{s=0\\ t=1}} = -\,6\,e$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \bullet \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \bullet \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (-6xy)(0) + \left(3y^2 - 3x^2\right)\left(e^x\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left(3y^2 - 3x^2\right)e^x$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left[\, 3\left(e^{2t}\right) - 3\left(e^{2s}\right)\right] e^t = 3\, e^{3t} - 3\, e^{2s+t}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{\substack{s = 0 \\ t = 1}} = 3\left(e^{3(1)} - 3\, e^{2(0)+1}\right)$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{\substack{s = 0 \\ t = 1}} = 3\left(e^{3} - e\right)$$

3) El radio de un cilindro circular recto está creciendo a razón de 6 cm en cada minuto y su altura decrece a razón de 4cm por minuto. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen y del área de la superficie cuando el radio es 12 cm y la altura 36 cm?

RESOLUCIÓN:

$$\frac{dr}{dt} = 6\ \frac{\text{cm}}{\text{min}}$$

$$\frac{dh}{dt} = -4\ \frac{\text{cm}}{\text{min}}$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\substack{r = 12\ \text{cm} \\ h = 36\ \text{cm}}}$$

$$V = V\left(r,\ h\right)$$

$$V = \pi\, r^2 h$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r} \bullet \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h} \bullet \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi r h \frac{dr}{dt} + \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\substack{r = 12 \text{ cm} \\ h = 36 \text{ cm}}} = 2\pi(12)(36)(6) + \pi(12)^2(-4)$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\substack{r = 12 \text{ cm} \\ h = 36 \text{ cm}}} = 4608\,\pi \frac{\text{cm}^3}{\text{min}}$$

$$A = A(r, h)$$

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial r} \bullet \frac{dr}{dt} + \frac{\partial A}{\partial h} \bullet \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = (2\pi h + 4\pi r) \frac{dr}{dt} + (2\pi h) \frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{\substack{r = 12 \text{ cm} \\ h = 36 \text{ cm}}} = \left[2\pi(36) + 4\pi(12)\right](6) + \left[2\pi(12)\right](-4)$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{\substack{r = 12 \text{ cm} \\ h = 36 \text{ cm}}} = 624\,\pi \frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$$

DERIVADA TOTAL

Los conceptos previamente abordados, se pueden *generalizar para funciones de* m *variables independientes y* n *variables intermedias* y, posteriormente, considerar su representación matricial.

Considérese una función escalar de varias variables $f\left(\bar{u}\right)$, siendo $\bar{u} = \left[u_1, u_2, \ldots, u_n\right]$ y a su vez

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1\left(\bar{x}\right) = u_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right) \\ u_2 &= u_2\left(\bar{x}\right) = u_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right) \\ &\vdots \\ u_n &= u_n\left(\bar{x}\right) \text{ ; donde } \bar{x} = \left[x_1, x_2, \ldots, x_m\right] \end{aligned}$$

$\bar{u}$ vector de variables intermedias

$\bar{x}$ vector de variables independientes

Entonces, se tiene

$$f\left(\bar{u}\right) = f\left(\bar{u}\left(\bar{x}\right)\right) \text{ función compuesta o función de función}$$

De acuerdo con el concepto de la regla de la cadena se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_2} \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} &= \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_m} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_m} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_m} \end{aligned}$$

Es posible representar estas derivadas parciales que nos presentan la generalización de la regla de la cadena, en la siguiente forma.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \\ \vdots & & \cdots & \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_m} & \frac{\partial u_2}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f}{\partial u_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial u_n} \end{bmatrix} \qquad (\mathrm{I})$$

CONTENIDO • INICIO • BIBLIOGRAFÍA

Esta es la representación matricial de la *regla de la cadena* generalizada.

También podemos hacer la representación matricial correspondiente para la *diferencial total*, pero ahora, de funciones compuestas.

Recordamos la forma de la diferencial total para funciones de dos variables independientes

$$z = f(x, y)$$

z : variable dependiente

x, y : variables independientes

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y}$$

Este concepto lo hacemos extensivo a las funciones compuestas.

DIFERENCIAL TOTAL DE FUNCIONES COMPUESTAS

Si consideramos la función compuesta anteriormente propuesta, para la representación matricial de la regla de la cadena generalizada, tenemos:

$$f(\bar{u}) = f(\bar{u}(\bar{x}))$$

$\bar{u}$ variable intermedia

$\bar{x}$ variable independiente

Desarrollando la *diferencial total* correspondiente, tendremos:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m$$

y en forma matricial:

$$df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_m \end{bmatrix} \qquad (\text{II})$$

Si observamos las expresiones (I) y (II), notamos que la matriz renglón de (II) representa la transpuesta del primer miembro de (I), entonces sustituimos (I) en (II) : (no olvidar trasponer en (I)), es decir:

$$df = \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial u_m} \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ \vdots & & \cdots & \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}}_{[B]}}_{\text{Transpuesta del primer miembro de (I)}} \underbrace{\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_m \end{bmatrix}}_{[C]}$$

llamando a estas matrices $[\,A\,]\,[\,B\,]\,[\,C\,]$, es decir:

$$df = [\,A\,]\,[\,B\,]\,[\,C\,]$$

es posible observar que $[\,B\,]\,[\,C\,]$ dan lugar a:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial u_1}{\partial x_m}\,dx_m \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial u_2}{\partial x_m}\,dx_m \\ \vdots \qquad\qquad \cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial u_n}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_m}\,dx_m \end{bmatrix}$$

y, justamente, cada uno de estos renglones es:

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots + \frac{\partial u_1}{\partial x_m}\, dx_m$$

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots + \frac{\partial u_2}{\partial x_m}\, dx_m$$

$$du_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots + \frac{\partial u_3}{\partial x_m}\, dx_m$$

entonces, se escribe la diferencial df en la forma:

$$df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial u_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_n \end{bmatrix} \qquad (\mathrm{III})$$

comparando las expresiones (II) y (III), notamos que prácticamente es la misma expresión, solo que en (III), el vector columna está referido a las variables intermedias y en (II), está referido a las variables independientes.

De lo anterior, se puede concluir que la forma de la diferencial total se conserva, independientemente, de que la función sea o no compuesta.

Finalmente, cabe mencionar lo siguiente:

La diferencial total de una función compuesta puede reducirse a la diferencial total en términos de las variables independientes.

DERIVADA TOTAL DE FUNCIONES COMPUESTAS

Para el caso particular de una función compuesta con diversas variables intermedias y una sola variable independiente, la derivada respecto a esta variable será una derivada ordinaria, a la cual llamaremos derivada total. (Es el concepto ya visto, pero en forma generalizada).

Sea $f = f(\bar{u})$; $\bar{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$

y $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, $u_n = u_n(t)$

En este caso, la variable independiente es solo t , de donde

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial t}$$

4.7 Función implícita

Definición

Es la función que no tiene despejada a la variable o variables dependientes.

Sea la función en forma implícita $F(x, y) = 0$ donde $y = f(x)$.

Diferenciemos $F(x, y) = 0$

$$d(F(x, y)) = d(0) = 0$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

así, podemos escribir:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dx = 0 \,, \quad dF = 0$$

multiplicando por $\frac{1}{dx}$ se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

despejando $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

Ahora, si tenemos la función $F(x, y, z) = 0$ donde $z = f(x, y)$ procedemos de forma similar diferenciando a la función implícita:

$$d\left[F(x, y, z)\right] = d(0) = 0$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$$

como tenemos $z = f(x, y)$, las derivadas de interés son $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Multiplicando por $\dfrac{1}{dx}$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0$$

tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1) + \frac{\partial F}{\partial y}(0) + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

despejando $\dfrac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

Para obtener $\frac{\partial z}{\partial y}$, procedemos de manera análoga a partir de la diferencial:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz = 0$$

ahora, multiplicando por $\frac{1}{dy}$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dy} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dy} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

despejando:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Para una función $F(x,\ y,\ z,\ w) = 0$, $w = f(\ x,\ y,\ z\ )$ las derivadas a obtener son $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial w}$

Procedemos de forma similar, diferenciando:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz + \frac{\partial F}{\partial w}\,dw = 0$$

tendremos tres casos para multiplicar por $\frac{1}{dx}$, $\frac{1}{dy}$, $\frac{1}{dz}$

en cada caso, tendremos lo siguiente:

multiplicando por $\frac{1}{dx}$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}(0) + \frac{\partial F}{\partial z}(0) + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

De aquí, despejando $\frac{\partial w}{\partial x}$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial w}}$$

multiplicando por $\frac{1}{d\,y}$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0) + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}(0) + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial w}}$$

multiplicando por $\frac{1}{d\,z}$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0) + \frac{\partial F}{\partial y}(0) + \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial w}}$$

Se generaliza lo anterior, para derivadas de funciones implícitas con una sola variable dependiente:

Sea $F\left(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n,\ y\right) = 0$ donde $y = f\left(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n\right)$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\ ;\quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\ ,\ldots,\ \frac{\partial y}{\partial x_n} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

y diremos que para que existan las derivadas $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, se requiere que existan todas la parciales $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ y, si existen, son únicos.

Ejemplos

1) Obtener $\frac{dy}{dx}$ de la función $x^3 - y^3 + x^2 + 2xy = 0$

RESOLUCIÓN:

$$F_x = 3x^2 + 2x - 2y$$

$$F_y = -3y^2 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 2x - 2y}{-3y^2 - 2x} = \frac{3x^2 + 2x - 2y}{3y^2 + 2x}$$

El mismo resultado se obtiene si se deriva implícitamente cada término respecto a la variable independiente:

$$3x^2 - 3y^2 y' + 2x - 2xy' - 2y = 0$$

$$y' \left(-3y^2 - 2x \right) = 2y - 3x^2 - 2x$$

$$y' = \frac{2y - 3x^2 - 2x}{-3y^2 - 2x}$$

$$y' = \frac{(-1)\left(2x + 3x^2 - 2y\right)}{(-1)\left(3y^2 + 2x\right)} = \frac{3x^2 + 2x - 2y}{3y^2 + 2x}$$

2) Obtener $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ de $3x^2 z - x^2 y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$

RESOLUCIÓN:

Sea $z = f(x, y)$

Derivando implícitamente:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + z\left(6x\right) - 2x^2 + 6z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 3y \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(3x^2 + 6z^2 + 3y\right) = 2xy^2 - 6xz$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy^2 - 6xz}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

$$3x^2 z - x^2 y^2 + 3z^2 + 3yz - 5 = 0$$

$$F_x = 6xz - 2xy^2$$

$$F_z = 3x^2 + 6z^2 + 3y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{6xz - 2xy^2}{3x^2 + 6z^2 + 3y} = \frac{-6xz - 2xy^2}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(-\frac{2x^2 y + 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y}\right) = \frac{2x^2 y + 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

3) Obtener $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ para $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

RESOLUCIÓN:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x}{2z} - \frac{x}{z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y}{2z} - \frac{y}{z}$$

Ahora bien, podríamos plantear la siguiente pregunta:

¿Qué pasa, si tenemos más variables dependientes?

En este caso, se requiere más de una ecuación.

Es más, si tenemos n variables dependientes se requerirán n ecuaciones.

Por ejemplo, si tenemos que x y y son independientes y, si u y v dependen de x y y se requerirán dos ecuaciones implícitas, es decir:

$$F(x, y, z, v) \quad \text{y} \quad G(x, y, u, v) = 0$$

También podemos plantear la siguiente pregunta:

¿No puede haber más de una ecuación con más de una variable dependiente?

Sí, pero no se tiene o no se garantiza la unicidad de la derivación.

Si ahora se tiene:

$$F(x, y, u, v) = 0 \qquad u = g(x, y)$$

$$G(x, y, u, v) = 0 \qquad v = h(x, y)$$

nos interesa:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

Procediendo en la forma antes descrita para funciones implícitas:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv = 0$$

multiplicando por $\frac{1}{dx}$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1) + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

multiplicando por $\frac{1}{dy}$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

y como tenemos otra función $G(x, y, u, v) = 0$, obtenemos la diferencial:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}\,dx + \frac{\partial G}{\partial y}\,dy + \frac{\partial G}{\partial u}\,du + \frac{\partial G}{\partial v}\,dv = 0$$

multiplicando por $\frac{1}{dx}$

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (3)$$

multiplicando por $\frac{1}{dy}$

$$\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (4)$$

Se tiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

En (1) y (3) aparecen dos de las incógnitas que son $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$

De (1) y (3):

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial x}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -F_x \\ -G_x \end{bmatrix}$$

Esta matriz recibe el nombre de matriz Jacobiana

Si se resuelve por Cramer:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ -\frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

El determinante obtenido de la matriz Jacobiana se llama Jacobiano

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_x \\ G_u & -G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & -\frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & -\frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}$$

Se le llama Jacobiano de las funciones implícitas de las variables u y v

Por simplicidad se dice el jacobiano de u y v, y se escribe así:

$$J\left(\frac{F,\ G}{u,\ v}\right), \text{ o bien, } \frac{\partial(F,\ G)}{\partial(u,\ v)}$$

El hecho de que $\frac{\partial(F,\ G)}{\partial(u,\ v)} \neq 0$ garantiza la existencia de las derivadas parciales.

Así, podemos escribir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}}{J\left(\frac{F,\ G}{u,\ v}\right)} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}}{J\left(\frac{F,\ G}{u,\ v}\right)}$$

En el manejo de otras literales:

$$J\left(\frac{m,\ n}{p,\ q}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial m}{\partial p} & \frac{\partial m}{\partial q} \\ \frac{\partial n}{\partial p} & \frac{\partial n}{\partial q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial m}{\partial p} & \frac{\partial n}{\partial p} \\ \frac{\partial m}{\partial q} & \frac{\partial n}{\partial q} \end{vmatrix}$$

Generalizando lo anterior, se puede escribir:

Teorema

Sean

$$\left.\begin{aligned} &F_1\left(x_1,\ x_2,\dots,x_n,\ y_1,\ y_2,\dots,y_m\right)=0\\ &F_2\left(x_1,\ x_2,\dots,x_n,\ y_1,\ y_2,\dots,y_m\right)=0\\ &\vdots\\ &F_m\left(x_1,\ x_2,\dots,x_n,\ y_1,\ y_2,\dots,y_m\right)=0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

donde

$$\left.\begin{aligned} &y_1=f_1\left(x_1,\ x_2,\dots,x_n\right)=y_1\left(x_1,\ x_2,\dots,x_n\right)\\ &y_2=f_2\left(x_1,\ x_2,\dots,x_n\right)\\ &\vdots\\ &y_m=f_m\left(x_1,\ x_2,\dots,x_n\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Si:

a) Las ecuaciones (1) son diferenciables y, además

b) El jacobiano

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \vdots & & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces, las derivadas parciales $\frac{\partial y_i}{\partial x_i}$ para

$$i=1,\ 2,\dots,m$$

$$j=1,\ 2,\dots,n$$

existen y son únicas.

De particular interés son los jacobianos que se tienen a partir de las ecuaciones que involucran el mismo número de variables dependientes e independientes y que corresponden a *reglas de transformación* conocidas como ecuaciones de transformación, por ejemplo:

$$T : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

las cuales nos permite transformar coordenadas polares a rectangulares:

$$A = \iint F(x,\ y)\ dx\ dy = \iint F(\rho,\ \theta)\left(J\left(\frac{x,\ y}{\rho,\ \theta}\right) d\rho\ d\theta \right)$$

Estos últimos conceptos se ampliarán en el curso correspondiente de Cálculo Vectorial.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Calcular el límite de la siguiente expresión, si es que existe:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy - x - y + 1}{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2}$$

2) Calcular el límite de la siguiente expresión, si es que existe:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - y}{x - y}$$

3) Calcular el límite siguiente, si es que existe:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y^2 - xy - 2x^2}{y - x}$$

4) Verificar que la función $z(x, y) = \cos(x + ay) + \operatorname{sen}(x - ay)$ satisface la ecuación $a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ conocida como ecuación de onda.

5) Describir la región R del plano coordenado xy que corresponde al dominio de la función $f(x, y) = e^{\sqrt{xy + 1}}$

6) Sea la función $f(x, y) = \sqrt{2ax - x^2 - y^2}$

a) Defina y grafique su dominio
b) Obtenga y grafique el recorrido
c) Dibuje algunas curvas de nivel cuando $f(x, y) =$ constante

7) Determinar el dominio y describir las curvas de nivel de la función:

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$$

8) Sea la función:

$$4z = 8 - x^2 - y^2$$

a) Determine su dominio y recorrido
b) Dibuje su gráfica
c) Identifique las curvas de nivel correspondientes a los valores $z = 2$; $z = -2$

9) Se deben obtener las curvas de nivel de la función:

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4y^2}}$$

10) Se debe calcular el dominio de la función $z = \ln(2x - 3y)$.

11) Para la expresión $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, derive implícitamente para obtener las primeras derivadas parciales de z.

12) El capitán Cosmos se encontraba en el lado soleado de Mercurio y notó que su traje espacial se fundía. Si la temperatura en el planeta se da por la expresión:

$$T(x, y, z) = e^{-x} + e^{-2y} + e^{-3z}$$

y el capitán se encuentra en el punto $(1, 1, 1)$, ¿en qué dirección deberá moverse para enfriarse lo más rápido posible?

13) Sea $z = f(x, y)$ una función que satisface la ecuación:

$$y^3 - yx^2 + yz^2 - z^2 = 3$$

si las derivadas parciales de z existen, calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

BIBLIOGRAFÍA

ANDRADE, D. A., *et al*., *Cálculo Diferencial e Integral*, México, Limusa-UNAM, Facultad de Ingeniería, 2004.

LARSON, R. E., *et al*., *Cálculo I*, 8ª. ed., México, McGraw-Hill, 2006. *Cálculo II*, 8ª. ed., México, McGraw-Hill, 2006.

SNIDER, D., *Análisis vectorial*, 6ª. ed., México, McGraw-Hill, 2002.

STEWART, J., *Cálculo*: *conceptos y contextos*, México, International Thomson Editores, 1999.

SWOKOWSKI, E. W., *Cálculo con Geometría Analítica*, 2ª. ed., México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1979.

ZILL, D., *et al*., *Cálculo de varias variables*, 4ª. ed., México, McGraw-Hill, 2011.

MESOGRAFÍA

http://www.vitutor.com/integrales/metodos/integrales_ejercicios

http://www.academia.edu/7708664/CALCULO_INTEGRAL_EJERCICIOS_RESUELTOS_PASO_A_PASO

https://rodas5.us.es/file/afc67ca3-750b-461b-aecc-388e05240ed1/1/series_SCORM.zip/page_02.htm

Apuntes de Cálculo Integral,
se publicó en marzo de 2021 en la plataforma oficial
de la Unidad de Apoyo Editorial (UDAE) de la Facultad
de Ingeniería, Ciudad Universitaria, México,
Ciudad de México. C.P. 04510